Introdução à Teoria de Conjuntos

Q1. Verdadeiro ou falso: $2 \in \{x \mid x+3=5\}$?

Q2. (Paulo César) Dado o conjunto $A = \{1,2,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, julgue os itens a seguir:

(a) $1 \in A$

(b) $\varnothing \in A$

(c) $\{1\} \in A$

(d) $\{1\} \subset A$

(e) $\{\{1\}\} \in A$

(f) $\{\{1\}\} \subset A$

Q3. Uma pessoa que gosta de todas as pessoas e apenas das pessoas que não gostam de si mesmas:
a) gosta de si mesma
b) não gosta de si mesma
c) não existe
d) gosta de alguém
e) não gosta de ninguém

Q4. Verdadeiro ou falso: $2 \subset \{1,2,3,4\}$?

Q5. Analisando as carteiras de vacinação das 84 crianças de uma creche, verificou-se que 68 receberam vacina Sabin, 50 receberam vacina contra sarampo e 12 não foram vacinadas. Quantas dessas crianças receberam as duas vacinas?

Q6. A negação da proposição $x \in (A \cup B)$ é:
a) $x \notin (A \cap B)$
b) $x \notin A$ ou $x \in B$
c) $x \notin A$ e $x \in B$
d) $x \in A$ ou $x \notin B$
e) $x \notin A$ e $x \notin B$

Q7. (Paulo César) Dado o conjunto $A = \{1,2,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$, julgue os itens a seguir:

(a) $\{1,2\} \subset A$

(b) $\{1,\{2\}\} \subset A$

(c) $\{1,2\} \in A$

(d) $\{\{2\},\{\{1\}\}\} \subset A$

(e) $\{\{2\},\{1\}\} \subset A$

Q8. Se $A = \{v \mid v$ é vogal da palavra PROGRESSO$\}$. Quais os elementos deste conjunto?

Q9. Se $\{1,3\} \subset \{6,x,4,y,7\}$, quanto vale $x+y$?

Q10. A, B e C tentam adivinhar um número selecionado ao acaso no conjunto $\{1,2,\ldots,100\}$. Ganha um prêmio quem mais se aproximar do número selecionado. Se A decidiu-se por 33 e B escolheu 75, qual a melhor escolha que C pode fazer?

a) 16 b) 32 c) 48 d) 54 e) 76

Q11. Se $2 \in \{3,a,5,1,0\}$, qual o valor de a^3?

Q12. Um médico disse: "— De 100 crianças que examino, 65 têm gripe e 45 têm gripe e outra doença." Quantas criaças têm outra doença?

Q13. Escreva os conjuntos por extensão:

(a) $A = \{x \mid x$ é vogal$\}$

(b) $B = \{x \mid x$ é número par positivo$\}$

(c) $C = \{x \mid x$ é capital da África do Sul$\}$

(d) $D = \{x \mid x$ é primo, positivo e par$\}$

Q14. Verdadeiro ou falso: $\{2\} \subset \{1,2,3,4\}$?

Q15. Verdadeiro ou falso: $\{x \mid x+2=5\} = \{3\}$?

Q16. Classifique em (V) ou (F) cada uma das sentenças abaixo:

(a) $0 \in \{0,1,2,3,4\}$

(b) $\{a\} \in \{a,b\}$

(c) $\varnothing \in \{0\}$

(d) $0 \in \varnothing$

(e) $\{a\} \subset \varnothing$

(f) $a \in \{a,\{a\}\}$

(g) $\{\{a\}\} \subset \{a,\{a\}\}$

(h) $\varnothing \subset \{\varnothing,\{a\}\}$

(i) $\varnothing \in \{\varnothing,\{a\}\}$

(j) $\{a,b\} \in \{a,b,c,d\}$

Q17. Sabendo que $\{m,n\} \subset \{2,4,6,8\}$, qual o maior valor que $m+n$ pode assumir?

Q18. O vazio é subconjunto de qualquer conjunto?

Q19. Escreva o conjunto das partes do conjunto $C = \{-1,0\}$.

Conjuntos Numéricos

Q20. (Kanguru (B)) Quantos números inteiros são maiores do que $2,09$ e menores do que $15,3$?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

Q21. Responda:

(a) Qual o menor número natural?

(b) Existe o maior número natural?

(c) Quantos números naturais existem?

(d) Quantos números naturais há entre 6 e 10 inclusive? E entre 25 e 26?

Q22. (PUC – Adaptado) Sendo $x = 0,313131\ldots$ e $y = 0,696969\ldots$, então $x + y$ é igual a:
a) 1
b) $1,10000\ldots$
c) $1,111\ldots$
d) $1,001001001\ldots$
e) $1,010101\ldots$

Q23. (Kanguru (B)) Escrevemos em ordem crescente os números inteiros positivos que são iguais ao resultado da multiplicação de seus divisores positivos, menores do que esses números e distintos entre si. Qual é o sexto dentre os números escritos?
a) 14 b) 15 c) 21 d) 22 e) 25

Q24. (Paulo César) Calcule $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 5\}$.

Q25. (Cataldo, J.J. & Brener) Se $0 < x < 1$, qual dos números abaixo é maior que x?
a) x^2 b) x^3 c) $\sqrt{x}$ d) $-x$ e) $0,9$ x

Q26. Assinale os itens em que encontramos números racionais (pertencentes à $\mathbb{Q}$):

(a) 2

(b) -4

(c) $1,32$

(d) π

(e) $3,212121\ldots$

(f) $4,001761943\ldots$

(g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(h) $-1,5$

(i) $3,1415926$

Q27. (UFF) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo:
a) $[1, \frac{3}{2})$ b) $(\frac{1}{2}, 1]$ c) $[\frac{3}{2}, 2]$ d) $(-1, 1)$ e) $[-\frac{3}{2}, 0)$

Q28. (Kanguru (J)) Sejam A e B dois números inteiros positivos, com $A > B$, tais que ambos não tenham divisores comuns maiores do que 1 e $AB = 300$. Quantos pares (A, B) satisfazem estas condições?
a) 1 b) 3 c) 4 d) 9 e) 18

Q29. (Paulo César) Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada afirmação a seguir:

(a) $0 \in \mathbb{N}^*$

(b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$

(c) $-3 \in \mathbb{Z}$

(d) $\mathbb{Z}_+ \supset \mathbb{N}$

Q30. (Machado – Adaptado) Calcule quais são os elementos do conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \cdot (x+1) \cdot (2x-1) \cdot (2x-4) = 0\}$.

Q31. Utilizando uma só vez cada um dos algarismos 2, 4, 6 e 7, escreva:

(a) O maior número natural;

(b) O maior número ímpar;

(c) O menor número par.

Q32. (Paulo César) Calcule a fração geratriz das dízimas periódicas em cada item a seguir:

(a) $0,\overline{4}$

(b) $1,777\ldots$

(c) $1,\overline{81}$

(d) $1,24\overline{15}$

Q33. (Kanguru (S)) Os inteiros positivos x e y não têm divisores comuns maiores do que 1 e, além disso, $xy = 300$. Qual é o menor valor possível obtido em $x + y$?
a) 30 b) 35 c) 37 d) 56 e) 79

Q34. (Machado – Adaptado) Considere os intervalos $I = [-3; 3]$ e $J = [0; 6]$, calcule $I \cap J$.

Q35. Assinale a alternativa FALSA:
a) $\sqrt{4} \in \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\}$
b) $-2 \notin \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x < 1\}$
c) $-\sqrt{2} \notin \{x \in \mathbb{Q} \mid -2 < x < \sqrt{2}\}$
d) $\sqrt[3]{-8} \in \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x < 1\}$

Q36. (EsPCEx) Para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{Z}$, com $n < k$, é sempre verdadeira a sentença:
a) $\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$
b) $\frac{n+k}{n \cdot k}$, é um número inteiro
c) $\sqrt{n} < \sqrt{k}$
d) $1 - n < 1 - k$
e) $\frac{1}{2^n} > \frac{1}{2^k}$

Produto Cartesiano e Relações Binárias

Q37. (Machado) Dados $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, forme todos os pares ordenados que têm o primeiro termo em A e o segundo termo em B.

Q38. (Iezzi & Murakami) Dar as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano abaixo (figura 1):

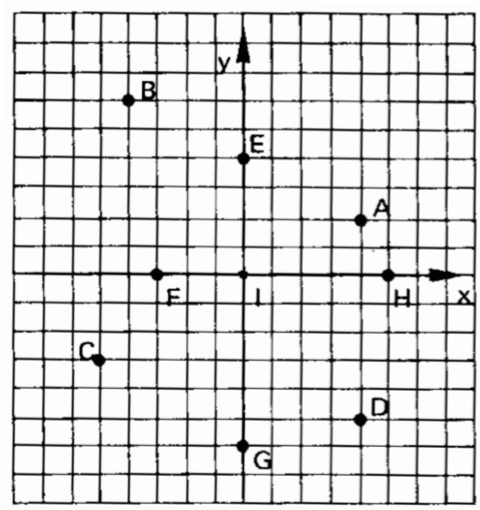


Figura 1

Q39. Considere os conjuntos $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ e $C = \{7\}$. Calcule:

(a) $A \times B$

(b) $C \times B$

(c) $C \times A$

Q40. (Machado) Calcule a e b de modo que se verifique a igualdade dos pares ordenados: $(a, 2b) = (3, 4)$.

Q41. (T1) Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 \leq x < 3\}$ e $B = \{-1, 0\}$. Calcule:

(a) os elementos de $A \times B$;

(b) o número de subconjuntos de B^2.

Q42. (Machado) Sendo $A = \{a, b\}$ e $B = \{x, y, z\}$, calcule os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$.

Q43. Considere o conjunto $C = \{-1, 0, 2\}$. Escreva os elementos do conjunto C^2.

Q44. Se um conjunto A tem 5 elementos e B tem 10 elementos, quantos elementos tem $A \times B$? E $B \times A$? Os conjuntos $A \times B$ e $B \times A$ são iguais?

Q45. Assinale no plano cartesiano os pontos: $A(2, -3)$, $B(0, -4)$, $C(-4, -5)$, $D(-1, 0)$, $E(0, 5)$, $F(5, 4)$, $G(3, 0)$, $H(-3, 2)$, $I(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$.

Q46. Um conjunto A tem 8 elementos, sendo B um conjunto tal que $A \times B$ tenha 40 elementos, então B pode ser o conjunto:
a) $\{1\}$
b) $\{0, 1\}$
c) $\{2, 3, 4\}$
d) $\{3, 4, 5, 6\}$
e) $\{a, e, i, o, u\}$

Q47. (Machado) Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, forme a relação de A em B $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y = 12\}$.

Q48. (Ávila) Sendo A e B dois conjuntos tais que $A \times B$ tem 21 elementos, então:
a) A pode ter 2 elementos
b) A pode ter 3 elementos
c) A pode ter 4 elementos
d) A pode ter 5 elementos
e) Nada se pode afirmar

Q49. (Machado) Dados $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, forme a relação de A em B $S = \{(x, y) \in A \times B \mid x + y \geq 15\}$.

Funções

Q50. Determine o domínio de cada uma das funções abaixo:

(a) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

(b) $r(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-2}$

(c) $s(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

(d) $t(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x+3}}$

(e) $u(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2}}{x-3}$

Q51. Seja a função f de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$. Qual o elemento do domínio que tem imagem igual a 2?

Q52. Sejam as funções f, g e h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^3$, $g(y) = y^3$ e $h(z) = z^3$. Quais delas são iguais entre si?

Q53. (PUC) O gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x$ está representado na figura 2.

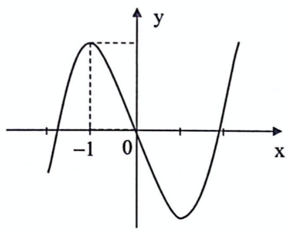


Figura 2

Quantas soluções reais tem a equação $x^3 - 3x - 3 = 0$?
a) 3
b) Nenhuma
c) 1
d) 2
e) N.R.A.

Q54. Um balão esférico com raio R tem seu volume dado por $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$. Encontre uma função que represente a quantidade de ar necessária para inflar o balão de um raio R até um raio $R + k$, $k \in \mathbb{R}_+$.

Q55. Qual a raiz da função real f dada por $f(x) = -12x + 48$?

Q56. Qual a raiz da função real f dada por $f(x) = x^2 - 5x + 6$?

Q57. Encontre o domínio das funções a seguir:

(a) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

(b) $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

(c) $f(x) = \sqrt[4]{x^2 - 6x}$

(d) $f(x) = \sqrt[4]{7 - 3x}$

(e) $f(t) = \sqrt[3]{t - 1}$

Q58. As funções: f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2}$ e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $g(x) = x$ são iguais? Justifique.

Q59. As funções f e g cujas leis de correspondência são:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$$

podem ser iguais? Justifique.

Q60. Encontre o domínio das funções a seguir:

(a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) $f(x) = 3 - 2x$

(c) $f(x) = x^2 + 2x - 1$

(d) $f(x) = \sqrt{x - 5}$

(e) $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$

Q61. Qual a raiz da função real dada por $f(x) = \sqrt[3]{-5x+25}$?

Q62. A função real $f(x) = \frac{1}{x^{2016}+16} + \frac{1}{x^{16}+2016}$ possui alguma raiz real?

Q63. Considere a função real f dada pelas potências inteiras decrescentes de x de 99 até 0, ou seja:

$$f(x) = x^{99} + x^{98} + \ldots + x^3 + x^2 + x + 1$$

Qual o valor de $f(1)$? E de $f(-1)$?

Funções do Primeiro Grau

Q64. (CMRJ) Considere a figura 3 a seguir, em que um dos lados do trapézio retângulo se encontra apoiado sobre o gráfico de uma função real de variável real definida por $f(x) = ax+b$.

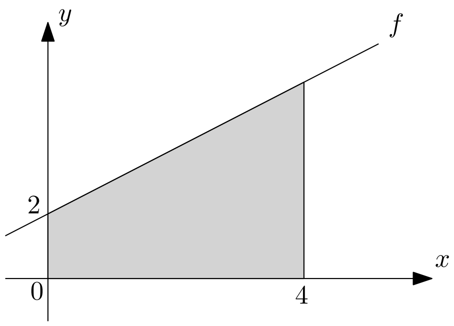


Figura 3

Sabendo-se que a área da região sombreada é 16 cm^2, podemos afirmar que:
a) $a - b = -1$.
b) $a + b = 8$.
c) $a = b = 2$.
d) $b - a = 3$.
e) $a + b = 6$.

Q65. (Iezzi & Murakami) Obtenha a expressão algébrica da função do primeiro grau cujo gráfico está representado abaixo na figura 4.

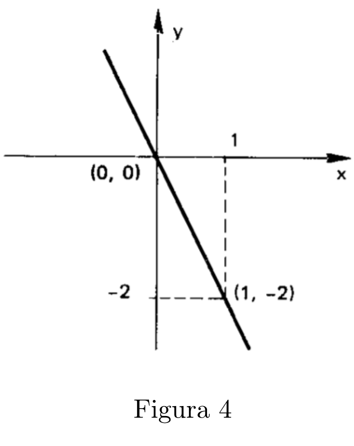


Figura 4

Q66. Existe um ponto de interseção dos gráficos de f e g, funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, sendo $f(x) = 3x - 4$ e $g(x) = 4x - 3$?

Q67. Construa o gráfico da função de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = y$ dada por $y = -3x - 4$.

Q68. Encontre a distância d do ponto de interseção dos gráficos das funções f e g, ambas do primeiro grau, sendo $f(x) = -x + 7$ e $g(x) = 3x - 5$, até a origem do sistema cartesiano.

Q69. (Iezzi & Murakami) Obtenha a expressão algébrica da função do primeiro grau cujo gráfico está representado abaixo na figura 5.

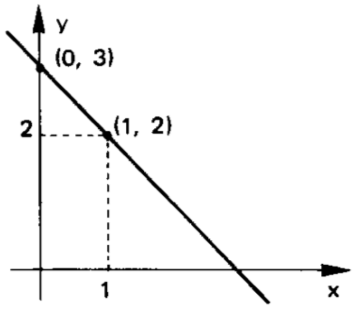


Figura 5

Q70. (CMRJ) O valor de uma máquina decresce linearmente com o tempo, devido ao desgaste. Sabendo-se que, hoje, ela vale 10.000 reais e, daqui a 5 anos, 1000 reais, o seu valor, em reais daqui a 3 anos, será:
a) 3.600 b) 4.200 c) 4.600 d) 5.000 e) 5.400

Q71. Construa o gráfico da função de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = y$ dada por $y = -x + 1$.

Q72. As funções reais do primeiro grau f e g dadas por $f(x) = (a+2)x + 4$ e $g(x) = (-3a+1)x + \sqrt{3}$ nunca se interceptam. Calcule o valor de a.

Q73. Qual o perímetro do triângulo formado pela interseção das funções das funções polinomiais do primeiro grau f, g e h, dadas respectivamente por $f(x) = 2x+1$, $g(x) = -x+2$ e $h(x) = x + 3$, duas a duas?

Q74. (EEAr) Sejam f e g funções polinomiais de primeiro grau, tais que o gráfico de f passa por $(2, 0)$ e o de g, por $(-2, 0)$. Se a intersecção dos gráficos é o ponto $(0, 3)$, é correto afirmar que
a) f e g são crescentes.
b) f e g são decrescentes.
c) f é crescente e g é decrescente.
d) f é decrescente e g é crescente.

Q75. Construa o gráfico da função de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = y$ dada por $y = -2x + 3$.

Q76. Seja f tal que $f(x) = (m-3)x + 3m - 2$. Calcule m para que a função passe pelo ponto $(5, 3)$.

Q77. Considere uma função real f tal que $f(x) = \sqrt{2}x + \sqrt{3}$. Qual o valor de $f(\sqrt{2})$?

Q78. (CCP) A raiz da função afim $f(x) = 3x - 15$ dista quantas unidades do ponto $(5, 4)$ do plano cartesiano?
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

Q79. Construa o gráfico da função de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com

$f(x) = y$ dada por $y = \frac{4-3x}{2}$.

Q80. Considere f uma função do primeiro grau tal que $f(1) = 8$ e $f(-1) = 2$. Encontre a expressão algébrica de $f(x)$.

Q81. Sejam p e q a abscissa e a ordenada, respectivamente, dos pontos de interseção de $f(x) = -\frac{3}{2}x + 3$ com os eixos coordenados. Mostre que a expressão algébrica de f pode ser escrita como $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$.

Q82. Considere que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x + (m + 3)$ é linear. Sendo assim, calcule:

(a) o valor do coeficiente angular de f;

(b) o valor de m e do coeficiente angular de f;

(c) a raiz de f;

(d) as coordenadas da interseção de f com $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x + 1$.

Q83. (EEAr) Se $f(x) = ax + b$ é uma função linear, então, considerados 4 números reais p, q, r e s ($p \neq q$, $r \neq s$), temos que a igualdade

$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{f(s) - f(r)}{s - r}$$

a) é sempre verdadeira.
b) só se verifica se $p > q$ ou $s > r$
c) só se verifica se $q > p$ ou $s > r$
d) nunca se verifica

Progressões Aritméticas

Q84. (Cataldo, J.J. & Brener) A sequência $(4x + 1; x - 2; x^2 - 5)$ é uma P.A. Calcule x.

Q85. Verifique se a sequência de cinco números a seguir é uma P.A.:

$$(3, 9, 15, 21, 27)$$

Q86. (Cataldo, J.J. & Brener) Determine x de modo que os números reais $\frac{10}{x}$, $(x - 3)$ e $(x + 3)$ formem uma P.A. nessa ordem.

Q87. (EEAr) Se $(x + 3, 2x - 1, x + 5)$ é uma P.A., então a soma dos três termos dessa P.A. é
a) -13 b) 15 c) 19 d) 27

Q88. A sequência de números $(1, a, 15, 22, 2b + 1)$ é uma P.A. Calcule os valores de a e b.

Q89. (FGV) Na sequência aritmética: $5, 12, 19, 26, 33, \ldots$, o primeiro termo que ultrapassa 2003 vale:
a) 2004 b) 2005 c) 2006 d) 2007 e) 2008

Q90. Para que a sequência de números a seguir seja uma P.A., quais devem ser os valores de a e b?

$$(1, 10, a + b, a - b, \ldots)$$

Q91. (Cataldo, J.J. & Brener) Calcule a quantidade de números naturais menores que 204, sabendo-que divididos por 7 deixam resto 2.

Q92. A sequência a seguir é uma P.A:

$$(6x + y, \frac{y - x}{3}, a_3, a_4, a_5, x + y, y)$$

Se $x + y = 14$, calcule o termo central a_4.

Q93. (Cataldo, J.J. & Brener) Seja f uma função tal que $f(1) = 2$ e $f(x + 1) = f(x) - 3$, para todo valor real de x. Calcule $f(50)$.

Q94. Considere a sequência numérica a seguir:

$$(1, \frac{5}{2}, 4, \frac{11}{2}, 7, \ell_6, \ell_7, \ldots)$$

Cada termo ℓ_n nesta sequência representa a medida do lado de um quadrado Q_n. Calcule a área do 7º quadrado.

Q95. (UFRJ) Os ângulos internos de um quadrilátero convexo estão em progressão aritmética de razão igual a 20°. Calcule o valor do maior ângulo desse quadrilátero.

Q96. Sabendo que (a, b, c, d) é uma P.A. e que $a+b+c+d = 10$ e $a + b = c$, então calcule o valor de $a + 2b + 3c + 4d$.

Q97. Considere a sequência $(a, b, 3)$ que é uma P.A. Se a e b são as raízes da equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, calcule a razão r da P.A.

Q98. Calcule o valor de $(a\sqrt{a})^a$, sabendo que (a, a^2, a^3) é uma P.A.

Progressões Geométricas

Q99. A sequência $(1, 2, \ldots)$ é uma P.G. Qual o terceiro termo desta P.G?

Q100. A sequência $(a, b, 4, 12)$ é uma P.G. Calcule o valor de $a + b$.

Q101. Sabendo que $(1, x, 9, y)$ é uma P.G., quais os possíveis valores para $x + y$?

Q102. A sequência $(1, x, 16)$ é uma P.G alternada. Qual o valor de x?

Q103. Considere a sequência numérica:

$$1, 2, a, b, \ldots$$

(a) Calcule $a + b$, se a sequência é uma P.A.;

(b) Calcule $a + b$, se a sequência é uma P.G.

Q104. Determine o valor de x na PG $(x, \sqrt[6]{2}, \sqrt[3]{2}, \sqrt{2}, \ldots)$.

Q105. Classifique as sentenças abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) na P.G. em que $a_1 > 0$ e $q > 0$, todos os termos são positivos.

(b) na P.G. em que $a_1 < 0$ e $q > 0$, todos os termos são negativos.

(c) na P.G. em que $a_1 > 0$ e $q < 0$, todos os termos são negativos.

(d) na P.G. em que $a_1 < 0$ e $q < 0$, todos os termos são negativos.

Q106. A sequência $(a-1, a, a+1)$ pode ser uma P.G.?

Q107. Classifique as sentenças abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) na P.G. de números reais em que $q < 0$ e $a_1 \neq 0$, os sinais dos termos são alternados, isto é, a P.G. é alternante.

(b) na P.G. alternante, todos os termos de índice ímpar têm o sinal de a_1 e os de índice par têm sinal contrário ao de a_1.

(c) se uma P.G. formada com números reais apresenta dois termos com sinais contrários, então a P.G. é alternante.

(d) existe uma P.G. de números reais em que $a_3 > 0$ e $a_{21} < 0$.

Q108. Qual deve ser o valor de k na sequência $(a-1, a, a+k)$ para que a mesma seja uma uma P.G.?

Q109. Sabendo-se que $(a, b, 1, 2, c, d)$ é uma P.G. calcule o valor do produto $abcd$.

Q110. Classifique as sentenças abaixo em verdadeira (V) ou falsa (F):

(a) existe uma P.G. de números reais em que $a_1 > 0$ e $a_{20} < 0$.

(b) se $q > 0$ e P.G. é crescente.

(c) se $a_1 > 0$ e $q > 0$, a P.G. é crescente.

(d) se $q > 1$, a P.G. é crescente.

Q111. Em uma PG $a_4 = 7$ e $a_9 = 224$. Determine o valor da razão.

Q112. Considere a equação do segundo grau dada por $x^2 - 2020x - ab = 0$ em que o produto das raízes vale 10. Se (a, m, p, b) é uma P.G. calcule o produto mp.

Q113. (Cesgranrio) Os três primeiros termos de uma P.G. são $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O quarto termo é:
a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) 1 c) $\sqrt[8]{2}$ d) $\sqrt[9]{2}$ e) $\frac{1}{2}$

Q114. Determine o 7º termo de P.G. $(\frac{4}{27}, \frac{4}{9}, \ldots)$.

Q115. Determine o valor do primeiro termo de uma P.G. que possui 10 termos, $a_{10} = 40$ e cuja razão vale 2.

Q116. Quantos termos possui uma PG de razão $\frac{3}{2}$, em que o primeiro e o último termos valem, respectivamente, $\frac{256}{9}$ e 486?

Matrizes

Q117. (EEAr) O elemento $X_{3,2}$ da matriz solução da equação matricial $3 \cdot X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 16 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ é
a) 0 b) -2 c) 3 d) 1

Q118. (T2) Determine a matriz inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Q119. (ITA) Sejam A, B e C matrizes reais quadradas de ordem n, e O_n a matriz nula, também de ordem n. Considere as seguintes afirmações:

(1) $AB = BA$

(2) Se $AB = AC$, então $B = C$

(3) Se $A^2 = O_n$, $A = O_n$

(4) $(AB)C = A(BC)$

(5) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

Qual a única correta?

Q120. (T2) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine $(A^{-1})^T$.

Q121. Calcule $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
a) $\begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} x & 3y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} x & -3y \\ 2x & -4y \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} x & 4y \\ 3y & 2x \end{pmatrix}$
e) $-2xy$

Q122. Determine, caso exista, a inversa da matriz $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Q123. (FATEC) Sejam $x = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -8 & 2 \end{pmatrix}$, em que $a \in \mathbb{R}$. Se $x^2 = y$, então:
a) $a = 2$
b) $a = -2$
c) $a = \frac{1}{2}$
d) $a = -\frac{1}{2}$
e) N.D.A.

Q124. Dada a matriz $X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 1 \end{pmatrix}$, o valor de $X^2 - 2X$ é:
a) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{y} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
b) $\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{y} \\ y & 2 \end{pmatrix}$
c) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{y} \\ y & 2 \end{pmatrix}$
d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Q125. (Mack) Se A é uma matriz 3×4 e B uma matriz $n \times m$, então:
a) existe $A + B$ se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$
b) existe AB se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$
c) existem AB e BA se, e somente se, $n = 4$ e $m = 3$
d) existem, iguais, $A + B$ e $B + A$ se, e somente se, $A = B$
e) existem, iguais, AB e BA se, e somente se, $A = B$

Q126. (FEI) Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule a matriz produto AB;

(b) Achar a condição para que o sistema $BA \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tenha solução.

Q127. (FUVEST) É dada a matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calcule P^2 e P^3;

(b) Qual a expressão de P^n? Prove por indução sobre n.

Q128. (Mack) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e A^t a matriz transposta de A, então calcule o valor de $A^t \cdot B$.

Q129. O valor de x para o qual se tem

$$\begin{pmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é:
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

Q130. (FAAP) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & b \end{pmatrix}$, calcular a e b, se $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}$.

Determinantes

Q131. (EsPCEx) As funções reais f e g são definidas pelos determinantes que se seguem:

$$f(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{vmatrix} \qquad g(x) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 1 \\ 1 & \operatorname{sen} x \end{vmatrix}$$

Sendo $h(x) = f(x) + g(x)$, então, o valor de $h(\frac{2\pi}{3}) + h(\frac{5\pi}{4})$ 'e:
a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{3}{4}$

Q132. (IBMEC) Os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são vértices de um retângulos de dimensões 3 e 4, conforme a figura 6:

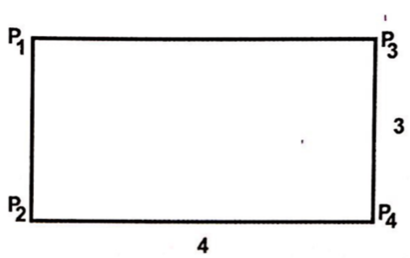


Figura 6

Seja a matriz 3×3, tal que a_{ij} é a distância entre P_i e P_j. O valor do determinante da matriz A é:
a) 12 b) 15 c) 20 d) 60 e) 120

Q133. (Mack) A matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{a^2} & -3 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é inversível. Então:
a) $a \neq \frac{1}{3}$ e $a \neq -\frac{1}{3}$
b) $a \neq 0$
c) $a \neq -1$
d) $a \neq \pm\frac{1}{3}$
e) a pode ser um número real qualquer

Q134. Calcule os determinantes das matrizes a seguir:

(a) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Q135. (EsPCEx) Sendo $\{a, b\} \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ e o determinante $\begin{vmatrix} a^2 & -4b & b^2 \\ a & 2 & a \\ b^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix} = 128a - 128b$, pode-se dizer que:
a) $a + b = 4$
b) $a + b = 8$
c) $a + b = 2\sqrt{2}$
d) $a + b = 4\sqrt{2}$
e) $a + b = 2$

Q136. A inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
a) não existe
b) tem determinante igual a -3
c) é igual a $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
d) tem determinante igual a $\frac{1}{3}$
e) tem determinante igual a $-\frac{1}{3}$

Q137. Calcule os determinantes a seguir:

(a) $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $M = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{bmatrix}$

(c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & a & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & b & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & c & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$

(e) $M = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ell & p & z & 0 & 0 & 0 \\ m & n & p & x & 0 & 0 \\ b & c & d & e & y & 0 \\ a & b & c & d & e & z \end{bmatrix}$

Q138. (UFF) Sendo $\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix} = k$, o valor da expressão

$$\begin{vmatrix} x & z \\ y & w \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} z & w \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y & x \\ w & z \end{vmatrix}$$

a) $3k$ b) $2k$ c) k d) $-k$ e) $-2k$

Sistemas Lineares

Q139. (EEAr) Para que valor de K o sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2x + Kz = 2 \end{cases}$ não possui solução?

a) -3 b) -6 c) 6 d) 3

Q140. (MAPOFEI) Resolva, usando a regra de Cramer, o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Q141. (EsPCEx) Sabendo que (x, y, z) é solução do sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = 3 \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$, o valor de $x^2 + y^2 + z^2$ é:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 10

Q142. Como podemos classificar o sistema linear a seguir?

$$\begin{cases} x - y = z \\ y - z = x \\ z - x = y \end{cases}$$

Q143. (EsPCEx) A soma dos valores de x, y e z que tornam o sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 5 \\ 3x - 2y + z = -2 \\ x + z = 0 \end{cases}$ verdadeiro é:

a) 1 b) 3 c) 2 d) 5 e) 4

Q144. (Mack) Dado o sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

os valores de x, y e z que constituem sua solução:
a) são todos distintos entre si
b) são indeterminados
c) possuem soma nula
d) são iguais entre si
e) formam uma P.A. de razão 1

Q145. (AFA) O sistema $\begin{cases} |x + y| = a \\ x - by = -a \end{cases}$ é indeterminado quando
a) $ab = -1$
b) $ab^{-1} = -1$
c) $a + b = -1$
d) $a - b = -1$

Q146. Verifique quais sistemas abaixo estão na forma escalonada. Caso não esteja coloque-o em uma forma escalonada.

(a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y - z + 5t = 9 \\ 3y + 2z - 3t = 4 \\ -z + t = 2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 3z = 0 \\ 2y + z = 1 \end{cases}$

Q147. (AFA) Os valores de m, para os quais o sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 0 \\ 4x + 3y + mz = 0 \end{cases}$$

admite somente a solução $x = y = z = 0$, são:
a) $m = 4$ b) $m > 0$ c) $m \neq 4$ d) $m < 5$

Q148. Verifique quais sistemas abaixo estão na forma escalonada. Caso não esteja coloque-o em uma forma escalonada.

(a) $\begin{cases} 3x + 2z = -2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - t = 1 \\ 5z - 2t = 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 2x - y + z - t = 1 \\ 5z - 2t = 3 \end{cases}$

Q149. Resolva o sistema pela regra de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \frac{2x-y}{3z+2} = \frac{z+1}{2x+y} = 1 \end{cases}$$

Q150. Calcule a, para que seja determinado o sistema $\begin{cases} ax - 2 = 12y - x \\ ax = 1 + 9y \end{cases}$.

Gabarito

Q1. Verdadeiro.
Q2.
(a) V
(b) F
(c) V
(d) V
(e) F
(f) F
Q3. C
Q4. Falso.
Q5. 46 crianças
Q6. E
Q7.
(a) V
(b) V
(c) V
(d) F
(e) V
Q8. $A = \{E, O\}$
Q9. 4
Q10. B
Q11. 8
Q12. 80 crianças.
Q13.
(a) $A = \{\text{a, e, i, o, u}\}$
(b) $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
(c) $C = \{\text{Pretória}\}$
(d) $D = \{2\}$

Q14. Verdadeiro.
Q15. Verdadeiro.
Q16.

(a) V
(b) F
(c) F
(d) F
(e) F
(f) V
(g) V
(h) V
(i) V
(j) F

Q17. 14
Q18. Sim.
Q19. $\mathcal{P}(C) = \{\varnothing, \{0\}, \{-1\}, \{0, -1\}\}$
Q20. D
Q21.

(a) Zero

(b) Não

(c) c) Infinitos

(d) Cinco; Nenhum

Q22. E
Q23. C
Q24. $A \cap B = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
Q25. C
Q26. Todos exceto (d), (f) e (g).
Q27. C
Q28. C
Q29.

(a) F

(b) V

(c) V

(d) V

Q30. $A = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\}$
Q31.

(a) 7642

(b) 6427

(c) 2476

Q32.

(a) $\frac{4}{9}$

(b) $\frac{16}{9}$

(c) $\frac{180}{99}$

(d) $\frac{12291}{9900}$

Q33. C
Q34. $I \cap J = [0, 3]$
Q35. A
Q36. E
Q37. $(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$
Q38. $A(4, 2)$, $B(-4, 6)$, $C(-5, -3)$, $D(4, -5)$, $E(0, 4)$, $F(-3, 0)$, $G(0, -6)$, $H(5, 0)$, $I(0, 0)$
Q39.

(a) $A \times B = \{(0, 2), (0, 5), (1, 2), (1, 5), (3, 2), (3, 5)\}$

(b) $C \times B = \{(7, 2), (7, 5)\}$

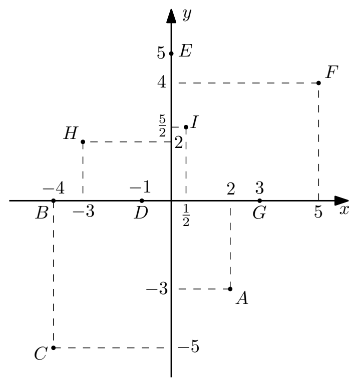
(c) $C \times A = \{(7, 0), (7, 1), (7, 5)\}$

Q40. $a = 3$; $b = 2$
Q41.

(a) $A \times B = \{(0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0)\}$;

(b) 16 subconjuntos

Q42. $A \times B = \{(a, x), (a, y), (a, z), (b, x), (b, y), (b, z)\}$ e $B \times A = \{(x, a), (y, a), (z, a), (x, b), (y, b), (z, b)\}$
Q43. $C \times C = \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 2),$
$(0, -1), (0, 0), (0, 2), (2, -1), (2, 0), (2, 2)\}$
Q44. $n(A \times B) = n(B \times A) = 50$ elementos. Não, $A \times B \neq B \times A$.
Q45.



Q46. E
Q47. $R = \{(2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4)\}$
Q48. B
Q49. $S = \{(5, 10), (6, 10), (7, 10), (8, 10), (7, 8), (8, 8)\}$
Q50.

(a) $D_q = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$

(b) $D_r = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2ex \neq 2\}$

(c) $D_s = \mathbb{R}$

(d) $D_t = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$

(e) $D_u = \mathbb{R} - \{3\}$

Q51. $x = -4$
Q52. São todas iguais.
Q53. D
Q54. $V_A(R) = 4\pi(R^2k + Rk^2 + \frac{k^3}{3})$
Q55. $x = 4$
Q56. $x = 2$ ou $x = 3$
Q57.

(a) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

(b) $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$

(c) $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$

(d) $(-\infty, \frac{7}{3}]$

(e) $\mathbb{R}$

Q58. Não, pois $Im_f = \mathbb{R}_+$ e $Im_g = \mathbb{R}$
Q59. Sim, basta que o domínio seja um subconjunto de $D = [1, +\infty)$ e o contradomínio seja o mesmo para ambas.
Q60.

(a) $[-2, 2]$

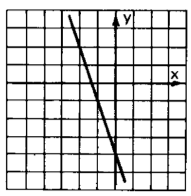
(b) $\mathbb{R}$

(c) $\mathbb{R}$

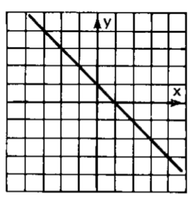
(d) $[5, +\infty)$

(e) $(-\infty, 3]$

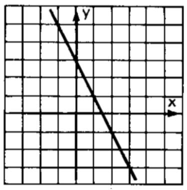
Q61. $x = 5$
Q62. Não.
Q63. $f(1) = 100$; $f(-1) - 0$
Q64. A
Q65. $y = -2x$
Q66. Não pois este ponto seria $(-1, -7)$ e $x = -1 \notin \mathbb{N}$
Q67.



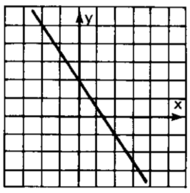
Q68. $d = 5$
Q69. $y = -x + 3$
Q70. C
Q71.



Q72. $-\frac{1}{4}$
Q73. $\frac{5}{3}(\sqrt{5}+2\sqrt{2})$
Q74. D
Q75.



Q76. $\frac{5}{2}$
Q77. $2+\sqrt{3}$
Q78. A
Q79.



Q80. $f(x) = 3x + 5$
Q81. —
Q82.

(a) -2

(b) $m = -3$; zero.

(c) 0

(d) $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Q83. A
Q84. $x = 0$ ou $x = -2$
Q85. Sim.
Q86. $x = 10$ ou $x = -1$
Q87. D
Q88. $a = 8$ e $b = 14$
Q89. D
Q90. $\frac{47}{2}$ e $b = -\frac{9}{2}$
Q91. 28
Q92. 10
Q93. -145
Q94. 100
Q95. 120°
Q96. 30
Q97. $r = 1$
Q98. 1
Q99. 4
Q100. $\frac{16}{9}$
Q101. 30 ou -30
Q102. -4
Q103.

(a) $a + b = 7$

(b) $a + b = 12$

Q104. 1
Q105.

(a) V

(b) V

(c) F

(d) F

Q106. Não.
Q107.

(a) V

(b) V

(c) V

(d) F

Q108. $k = \frac{a}{a-1}$, $a \neq 1$
Q109. 4
Q110.

(a) V

(b) F

(c) F

(d) F

Q111. 2
Q112. -10
Q113. B
Q114. 108
Q115. $\frac{5}{64}$
Q116. 8
Q117. A
Q118. $A = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
Q119. Afirmação (4).
Q120. $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$
Q121. A
Q122. $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$
Q123. B
Q124. D
Q125. C
Q126.

(a) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $a + b = 0$

Q127.

(a) $P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $P^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Q128. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Q129. D
Q130. $a = 4$ e $b = -3$
Q131. A
Q132. E
Q133. E
Q134.

(a) -54

(b) -44

Q135. A
Q136. E
Q137.

(a) -208

(b) $a^2 + b^2$

(c) 48

(d) $abcd$

(e) $(xyz)^2$

Q138. A
Q139. C
Q140. $(x, y, z) = (-1, 2, 2)$
Q141. A
Q142. Possível e determinado.
Q143. E
Q144. D
Q145. C
Q146. (a) e (b) estão escalonados.
Q147. C
Q148. (f) está escalonado.
Q149. $(x, y, z) = (\frac{3}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4})$
Q150. $a \neq 3$