Uma Análise Criteriosa da Fórmula do Produto dos n Termos de uma Sequência Geométrica

Leonardo S. Barbosa

15 de fevereiro de 2021

1 Introdução

A ideia principal deste material é fazer algumas considerações gerais sobre o produto dos n termos de uma sequência geométrica, principalmente em relação à formula que calcula o produto.

Para que fique claro, aqui neste texto, já consideraremos conhecidas a definição de sequências geométricas (P.G.) e as propriedades destas sequências, sendo assim, se houver alguma dúvida sobre este conceito, recomenda-se rever os materiais que abordem este conceito.

Além disso, usaremos também o cálculo de uma série aritmética ou, como é mais conhecida, a soma dos n termos de uma progressão aritmética e, caso ache necessário, vale a pena revisar este assunto.

Também usaremos algumas propriedades de potenciação de números reais para manipular as expressões e a ideia de módulo de um número real também vai ser utilizada.

2 Produto dos n Termos

Dada a sequência geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ queremos calcular P_n definido por:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Usando o termo geral a_n de uma sequência geométrica, que é definido por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ podemos reescrever cada fator do produto P_n, usando este termo geral, de modo que obteremos:

$$P_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \ldots \cdot a_1 q^{n-1}$$

Que pode ser reescrito, usando a propriedade comutativa da multiplicação, como:

$$P_n = a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_1 \cdot q \cdot q^2 \cdot \ldots \cdot q^{n-1}$$

Repare que há n fatores iguais a a_1 e que podemos escrever:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{1+2+3+\ldots+n-1}$$

A série $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1$ é uma série aritmética e vale $S = \frac{n(n-1)}{2}$. Daí podemos escrever:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Que corresponde à expressão que nos dá o produto dos n termos de uma sequência geométrica.

O que faremos agora é verificar que outras expressões podem nos dar o mesmo resultado, porém, usando outras abordagens, e que podem ser obtidas ou modificando a expressão anterior ou através de propriedades das sequências geométricas. Vejamos agora uma variação desta expressão.

3 Produto dos n Termos: Parte II

Vamos agora revisitar a expressão que calculamos para P_n. Vamos tentar reescrevê-la em função de a_n e q. Sabemos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, daí teremos:

$$a_1 = \frac{a_n}{q^{n-1}}$$

Elevando ambos os membros ao expoente n teremos:

$$a_1^n = \frac{a_n^n}{(q^{n-1})^n} = \frac{a_n^n}{q^{(n-1)n}}$$

Como $P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ podemos escrever:

$$P_n = \frac{a_n^n}{q^{(n-1)n}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Logo:

$$P_n = a_n^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2} - (n-1)n} =$$

Finalmente:

$$P_n = a_n^n \cdot q^{\frac{n(1-n)}{2}}$$

Ou, como alguns podem preferir:

$$P_n = \frac{a_n^n}{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

Neste caso o produto fica escrito em função de a_n e não de a_1.

4 Termo Central

Agora escreveremos o produto dos termos em função do termo central. Vamos supor que o número n de termos da sequência geométrica seja ímpar. Neste caso, haverá um termo central na posição $\frac{n+1}{2}$. Ou seja, a sequência será $(a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n+1}{2}}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$.

Perceba que como há n termos, excluído o termo central, restam $n-1$ termos que ficam divididos: metade antes do termo central, logo $\frac{n-1}{2}$ termos, e; metade depois do termo central; portanto, os outros $\frac{n-1}{2}$ termos. Usando, então, a definição de sequência geométrica podemos reescrever, deste modo, a sequência como segue:

$$\left(\frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{q^{\frac{n-1}{2}}}, \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{q^{\frac{n-1}{2}-1}}, \ldots, \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{q}, a_{\frac{n+1}{2}}, a_{\frac{n+1}{2}}q, \ldots, a_{\frac{n+1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}-1}, a_{\frac{n+1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}}\right)$$

Veja um exemplo com apenas 7 (ou seja, $n = 7$) termos para esclarecer (visualizar) melhor:

$$\left(\frac{a_3}{q^3}, \frac{a_3}{q^2}, \frac{a_3}{q}, a_3, a_3q, a_3q^2, a_3q^3\right)$$

Assim, fica mais fácil perceber que a potências envolvendo a razão se "distribuem" simetricamente em torno do termo central. Deste modo, quando efetuado o produto de todos os termos haverá cancelamento das potências envolvendo a razão. Escrevendo os produtos teremos:

$$P_n = \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{q^{\frac{n-1}{2}}} \cdot \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{q^{\frac{n-1}{2}-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{\frac{n+1}{2}}}{q} \cdot a_{\frac{n+1}{2}} \cdot a_{\frac{n+1}{2}}q \cdot \ldots \cdot a_{\frac{n+1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}-1} \cdot a_{\frac{n+1}{2}}q^{\frac{n-1}{2}}$$

Como há n fatores iniciais que foram reescritos em função do termo central e da razão teremos:

$$P_n = (a_{\frac{n+1}{2}})^n$$

Veja o exemplo anterior que demos com apenas 7 termos:

$$P_7 = \frac{a_3}{q^3} \cdot \frac{a_3}{q^2} \cdot \frac{a_3}{q} \cdot a_3 \cdot a_3q \cdot a_3q^2 \cdot a_3q^3 \Rightarrow P_7 = (a_3)^7$$

Agora, e se não houver um termo central? Vejamos mais uma abordagem para o produto P_n.

5 Produto dos n Termos: Parte III

Vamos, mais uma vez, revisitar a fórmula do produto dos n termos que vimos inicialmente:

$$P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Usando propriedades de potenciação em $\mathbb{R}$, vamos reescrever esta expressão da seguinte maneira:

$$P_n = [(a_1)^2]^{\frac{n}{2}} \cdot q^{\frac{n}{2}\cdot(n-1)} = [(a_1)^2]^{\frac{n}{2}} \cdot [q^{(n-1)}]^{\frac{n}{2}}$$

Veja que substituímos a_1^n por $a_1^{\frac{2n}{2}}$. Mais uma vez usando propriedades de potenciação envolvendo produtos de potências:

$$P_n = [(a_1)^2 \cdot q^{(n-1)}]^{\frac{n}{2}}$$

Que pode ser escrito como:

$$P_n = \{[(a_1 \cdot a_1 \cdot q^{(n-1)}]^n\}^{\frac{1}{2}}$$

Como sabemos que $a_n = a_1 q^{n-1}$, podemos escrever:

$$P_n = \{[a_1 \cdot a_n]^n\}^{\frac{1}{2}}$$

Ou ainda:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Este resultado pode parecer correto, mas há um equívoco, na realidade um breve deslize; veja este exemplo: a sequência $(-1, 2, -4)$ tem um produto positivo, pois $(-1) \cdot 2 \cdot (-4) = 8$ e, usando a fórmula, teríamos:

$$P_3 = \sqrt{((-1) \cdot (-4))^3} = 8$$

Mas se a sequência for $(1, -2, 4)$, temos um produto negativo, pois $1 \cdot (-2) \cdot 4 = -8$ e, usando a fórmula, teríamos:

$$P_3 = \sqrt{(1 \cdot 4)^3} = 8$$

Que não é o valor correto, a não ser que soubéssemos, de antemão, que o número de termos negativos da sequência é ímpar. Mas, por que ocorre este equívoco? O "engano" está na passagem sutil de escrever $a_1^n = (a_1^2)^{\frac{n}{2}}$. Pois, veja que, na verdade, deveríamos escrever

$$\{[(a_1)^2]^{\frac{1}{2}}\}^n = |a_1|^n$$

Se $a_1 \geq 0$, não há problema em afirmar que $|a_1|^n = a_1^n$, pois $n \in \mathbb{N}^*$. Por outro lado, $|a_1|^n = a_1^n$, se n é par e $|a_1|^n = -a_1^n$ se n é ímpar e, obviamente, sempre o resultado será positivo. O que nos coloca diante de uma situação complicada em torno do sinal e da aplicação da raiz quadrada do produto $a_1 \cdot a_n$. Vamos então procurar outra abordagem, para simplificar a obtenção de P_n e não dependermos desta análise do sinal de a_1 e de seu módulo. Veja que:

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

E

$$P_n = a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1$$

Pela comutatividade da multiplicação. Multiplicando, então, a primeira pela segunda equação termo a termo:

$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_2 \cdot a_{n-1}) \cdot \ldots \cdot (a_n \cdot a_1)$$

Levando a:
$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n) \cdot (a_1 \cdot a_n) \cdot \ldots \cdot (a_1 \cdot a_n)$$
Como há n fatores:
$$(P_n)^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$$
Daí, extraindo a raiz quadrada de ambos os lados teremos:
$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$
Ou seja:
$$P_n = \pm\sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$
O que nos diz que o produto pode ser positivo ou negativo, dependendo do número de termos negativos existentes na sequência. Deste modo, só será possível usar esta expressão anterior considerando-se esta informação. Vejamos o exemplo já visto anteriormente. A sequência $(1, -2, 4)$ tem um produto negativo e, usando a expressão vista, teríamos $P_3 = -\sqrt{(1 \cdot 4)^3} = -8$.

Vejamos uma outra situação: imaginemos a sequência geométrica $(-1, 2, \ldots)$. Qual o produto dos cinco primeiros termos? A pergunta é simples. E podemos fazer $a_5 = (-1) \cdot (-2)^4 = -16$ para o cálculo do quinto termo. Pela fórmula em função de a_1 e a_5, teremos:
$$P_5 = \pm\sqrt{((-1) \cdot (-16))^5} = \pm 1024$$
Qual valor devemos dar como resposta? O correto é $+1024$ ou -1024? Teríamos que analisar o número de termos, que no caso é 5 e o sinal da razão, que nesse caso é -2 e, portanto, negativa. Daí teremos uma sequência alternante e, de fato, três termos negativos e dois positivos. Veja:
$$(-1, 2, -4, 8, -16, \ldots)$$
Usando a expressão que consideramos inicialmente, teríamos:
$$P_5 = (-1)^5 \cdot (-2)^{\frac{5 \cdot 4}{2}} = (-1) \cdot 2^{10} = -1024$$
O que não dependeria nem do quinto termo e nem da análise do número de termos negativos existentes. Veja que neste caso há um termo central. Vamos usar a expressão vista. O termo central é o da posição $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$. Logo $a_3 = (-1) \cdot (-2)^2 = -4$. Daí:
$$P_3 = (a_3)^5 = (-4)^5 = -1024$$
Apesar de ter que calcular o termo central, mas uma vez "esquivamos" da análise do sinal.

Façamos ainda uma última observação. Veja que, por conta de a fórmula envolver a extração de uma raiz quadrada, não podemos simplesmente fazer:
$$P_n = \pm\left(\sqrt{a_1 \cdot a_n}\right)^n$$

Extraindo primeiro a raiz quadrada e, depois, calculando a potência de expoente n do resultado. Agora, veja a sequência:

$$(1, -2, 4, -8)$$

Neste caso, a expressão como escrevemos, ficaria:

$$P_4 = \pm \left(\sqrt{1 \cdot (-8)} \right)^4 = \pm \sqrt{(-8)}^4$$

O que nos forçaria, em primeiro lugar, calcular $(-8)^4$ uma vez que a raiz quadrada de -8 não é definida em $\mathbb{R}$. Mas por outro lado veja:

$$P_4 = 1^4 \cdot (-2)^{\frac{4 \cdot 3}{2}} = 64$$

Que é perfeitamente o valor correto do produto, sem a menor preocupação com questões envolvendo os sinais dos termos.

6 Considerações Finais

Como dito no início deste material, queremos então mostrar, com essa análise mais ou menos formal, que a manipulação algébrica da fórmula que envolve o produto de n termos pode resultar em uma outra fórmula que talvez, em alguns casos, ser mais trabalhosa que a original, necessitando de uma observação cuidadosa da relação entre o sinal da razão e o número de termos existentes.

Trouxemos também "à tona" um importante aspecto que envolve o módulo de um número real que tem a ver com a radiciação de índices pares de potências reais também de expoentes pares, que pode resultar em equívocos envolvendo sinais.

Finalmente, o principal aspecto proposto neste texto é que se tenha um certo grau de curiosidade em como são obtidas as fórmulas para que se entenda verdadeiramente como e quando elas podem realmente ser empregadas para a resolução de problemas. Esta curiosidade é a chave para o acúmulo de conhecimento e de maior entendimento de vários assuntos e de como eles se conectam entre si.