Q1.
(LSB) Considere a sequência numérica:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + b \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Sabendo que $x^2 - ax + b = 0$ é equação do segundo grau com incógnita x, em $\mathbb{R}$, com raízes que possuem a soma igual a 2 e o produto igual a 3, a soma dos 10 primeiros termos da sequência vale:
a) 155 b) 165 c) 310 d) 330

Q2.
(LSB) Sabendo que S_n é a série numérica $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots$, calculando $[S_{(3n)} - S_{(2n)}]^2$ teremos:
a) $\frac{8}{21}$ b) $\frac{256}{441}$ c) $\frac{64}{441}$ d) $\frac{16}{21}$

Q3.
(LSB) Na figura 1, $ABCD$ é um quadrado com $BF = 2 \cdot FC$.

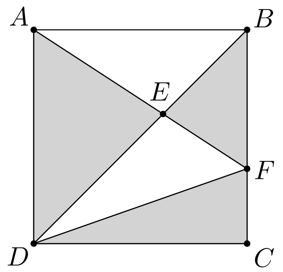

Figura 1

A razão entre a área hachurada (cinza) e a área não hachurada (branca) é:
a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{3}{2}$

Q4.
(LSB) O polígono regular convexo que tem o número de diagonais que passam pelo centro do polígono, o número de lados do polígono e o número total de diagonais em progressão aritmética, nesta ordem, tem um ângulo central em radianos, de:
a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{2\pi}{3}$

Q5.
(LSB) Os pontos A, B, C, D e E pertencem, nesta ordem, a uma circunferência de raio $R = 2021$. Considerando que $AB = \ell_3$, $BC = \ell_5$, $CD = \ell_6$ e $DE = \ell_8$, em que ℓ_n é o lado do polígono regular convexo de n lados, a soma dos comprimentos dos menores arcos determinados pelas cordas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$, respectivamente, corresponde a uma porcentagem do comprimento da circunferência igual a:
a) $82,5\%$ b) 50% c) $22,5\%$ d) $62,5\%$

Q6.
(LSB) Na figura 2, $ABCD$ é quadrado e DEF é triângulo equilátero, ambos de lados iguais a a.

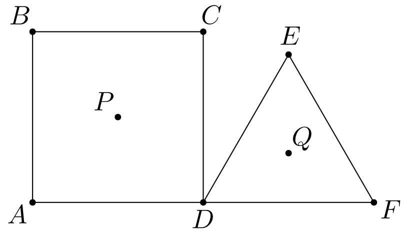

Figura 2

O ponto P é o ponto de encontro das diagonais do quadrado e o ponto Q é o incentro do triângulo. O valor de PQ é:
a) $\frac{a}{6} \cdot \sqrt{8(6 - \sqrt{3})}$
b) $\frac{a}{4} \cdot \sqrt{8 - \sqrt{3}}$
c) $\frac{a}{6} \cdot \sqrt{48 - 12\sqrt{3}}$
d) $\frac{a}{2} \cdot \sqrt{48 - \sqrt{3}}$

Q7.
(LSB) Considere a série numérica

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{6^n + 10^n + 15^n}{30^n} + \ldots$$

Como resultado, teremos, para o limite da soma:
a) $\frac{31}{30}$ b) $\frac{49}{16}$ c) $\frac{31}{900}$ d) $\frac{7}{4}$

Q8.
(LSB) A figura 3 mostra triângulos equiláteros construídos uns sobre os lados dos outros.

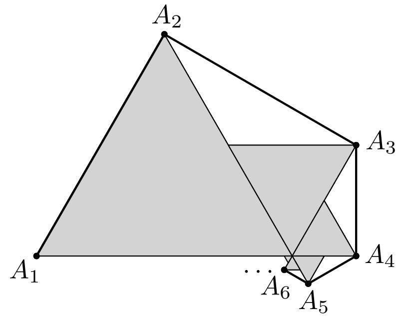

Figura 3

Cada triângulo desenhado, a partir do segundo, tem um lado que é igual a metade do lado do triângulo anterior e pelo menos um dos vértices do triângulo desenhado coincide com um vértice do triângulo desenhado a seguir. O comprimento da linha poligonal $A_1A_2A_3A_4\ldots$, considerando que $A_1A_2 = L$, é:
a) $(2 + \sqrt{3})L$ b) $(2 + \sqrt{3})L$ c) $(2 + \sqrt{3}) \cdot \frac{L}{2}$ d) $(1 + \sqrt{3})L$

Q9.
(LSB) Analise as afirmações a seguir envolvendo o conceito de porcentagem e assinale a Verdadeira:
a) Dois aumentos sucessivos de 10% correspondem a um aumento único de 20%
b) Calcular $x\%$ de y é o mesmo que calcular $y\%$ de x.
c) Para obter o resultado de 30% de aumento sobre p, basta fazer $1,03p$.

d) Um aumento de $m\%$ sobre um dado valor seguido de um desconto de $m\%$ sobre este total obtido, resultará em um valor igual ao inicial.

Q10.
(LSB) Uma matriz M tem 100 elementos e é construída da seguinte maneira:

$$M = (m_{ij})_{10\times 10} = i + j$$

Deste modo, o traço da matriz vale:

a) 55 b) 45 c) 110 d) 220

Gabarito

1) A soma das raízes x_1 e x_2 da equação é $x_1 + x_2 = -\frac{-a}{1}$, logo $a = 2$. O produto, por sua vez, é $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{1}$, daí $b = 3$. Sabemos então que a sequência é:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + 3 \end{cases}$$

Que caracteriza uma P.A. de razão 3. Veja: $(2, 5, 8, 11, \ldots)$. Para a soma dos 10 primeiros precisamos de a_{10}:

$$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 \Rightarrow a_{10} = 29$$

Daí:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{(2 + 29) \cdot 10}{2} \Rightarrow S_{10} = 155$$

Opção A.

2) O termo geral da sequência original era $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$. Então $a_{(3n)} = \frac{1}{2^{3n-1}}$ e $a_{(2n)} = \frac{1}{2^{2n-1}}$, que darão origem às séries que seguem:

$$S_{(3n)} = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{256} + \ldots$$

e

$$S_{(2n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \ldots$$

Assim, $S_{(3n)} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{8}}$ e $S_{(2n)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}$, portanto:

$$[S_{(3n)} - S_{(2n)}]^2 = \left(\frac{2}{7} - \frac{2}{3}\right)^2 = 4 \cdot \frac{16}{441} = \frac{64}{441}$$

Opção C.

3) Digamos que L seja o lado do quadrado. Se S é a área do quadrado, então:

$$(CDF) = \frac{FC \cdot CD}{2} = \frac{\frac{L}{3} \cdot L}{2} = \frac{L^2}{6} = \frac{S}{6}$$

Como $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, então os triângulos ADE e FBE são semelhantes pelo caso $AA \sim$. Como $BF = \frac{2}{3}L$ e $AD = L$, teremos $\frac{BF}{AD} = \frac{2}{3}$ e esta será a razão entre as alturas de BEF e ADE. Seja x a altura do ΔBEF, daí:

$$\frac{x}{L-x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 2L - 2x \Rightarrow x = \frac{2}{5} \cdot L$$

Vamos calcular as áreas:

$$(BEF) = \frac{\frac{2L}{3} \cdot \frac{2L}{5}}{2} \Rightarrow (BEF) = \frac{2}{15} \cdot L^2 = \frac{2S}{15}$$

Continuando:

$$(ADE) = \frac{L \cdot \frac{3L}{5}}{2} \Rightarrow (ADE) = \frac{3}{10} \cdot L^2 = \frac{3S}{10}$$

Agora vamos somar as áreas (CDF), (BEF) e (ADE):

$$(CDF) + (BEF) + (ADE) = \frac{S}{6} + \frac{2S}{15} + \frac{3S}{10} = \frac{3S}{5}$$

Essa é a área em cinza. Assim, a área em branco corresponde à $\frac{2S}{5}$. Então, a razão entre as áreas cinza e branca é $\frac{\frac{3S}{5}}{\frac{2S}{5}} = \frac{3}{2}$. Opção D.

4) O número de diagonais que passam pelo centro é $d_c = \frac{n}{2}$, o número de lados é n e o número de diagonais é $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Sendo assim, $(\frac{n}{2}, n, \frac{n(n-3)}{2})$ é a P.A. e claro:

$$2n = \frac{n}{2} + \frac{n(n-3)}{2}$$

Continuando:

$$4n = n + n(n-3) \Rightarrow n^2 - 6n = 0$$

Então $n = 6$ ou $n = 0$. Como $n \geq 3$ teremos $n = 6$. O ângulo central será, portanto, $a_c = \frac{360^\circ}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad. Temos a opção B.

5) O comprimento do menor arco determinado por uma corda que é lado de um polígono regular convexo de n lados é $C_n = \frac{2\pi R}{n}$, em que R é o raio da circunferência circunscrita, assim, o comprimento total C dos arcos somados será:

$$C = \frac{2\pi R}{3} + \frac{2\pi R}{5} + \frac{2\pi R}{6} + \frac{2\pi R}{8}$$

Teremos:

$$C = 2\pi R \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)$$

Logo:

$$C = 2\pi R \cdot \frac{40 + 24 + 20 + 15}{120} \Rightarrow C = 2\pi R \cdot \frac{99}{120}$$

Dividindo pelo comprimento da própria circunferência:

$$\frac{C}{2\pi R} = \frac{33}{40} = 0,825 = 82,5\%$$

Opção A.

6) Vamos traçar o segmento $\overline{PQ}$. Além disso, traçaremos $\overline{PY}$ e $\overline{QZ}$ tais que $\overline{PY} \perp \overline{AD}$ e $\overline{QZ} \perp \overline{DF}$ como na figura 4.

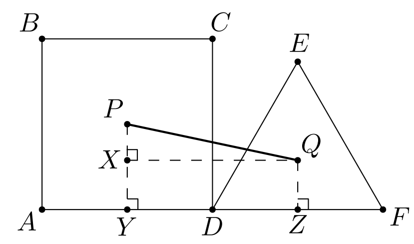

Figura 4

Traçando $\overline{XQ} \parallel \overline{YZ}$, teremos ΔPQX retângulo em X. Daí teremos:

$$PQ^2 = PX^2 + QX^2$$

O ponto Q é também o baricentro de DEF, pois ele é equilátero. Assim, $PY = \frac{a}{2}$ (P é centro do quadrado), $QZ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Também teremos $YZ = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ e $PX = PY - XY$, ou seja, $PX = \frac{a}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$. O quadrilátero $QXYZ$ é retângulo e teremos $QX = YZ = a$. Portanto:

$$PQ^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + a^2$$

Então:

$$PQ^2 = \frac{a^2}{4} - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{3a^2}{36} + a^2$$

Finalmente:

$$PQ^2 = \frac{48a^2 - 6a^2\sqrt{3}}{36}$$

Daí:

$$PQ = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{8(6 - \sqrt{3})}$$

7) Veja que:

$$\frac{6^n+10^n+15^n}{30^n}=\frac{6^n}{30^n}+\frac{10^n}{30^n}+\frac{15^n}{30^n}=\frac{1}{5^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{2^n}$$

Assim, sabemos que a série apresentada pode ser separada em séries (somas) parciais S_1, S_2 e S_3:

$$S_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

$$S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$$

E

$$S_3=\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$$

Logo:

$$S_1+S_2+S_3=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}$$

E, finalmente:

$$S_1+S_2+S_3=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

Opção D.

8) Dado que $A_1A_2=L$, podemos usar a lei dos cossenos para calcular A_2A_3 em função de L:

$$(A_2A_3)^2=\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2-2\cdot\frac{L}{2}\cdot\frac{L}{2}\cdot\cos 120^\circ$$

Daí:

$$(A_2A_3)^2=\frac{2L^2}{4}-2\cdot\frac{L^2}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

Então:

$$(A_2A_3)^2=\frac{3L^2}{4}\Rightarrow A_2A_3=\frac{L\sqrt{3}}{2}$$

Como o padrão na figura se repete indefinidamente, cada segmento da linha poligonal a partir de $\overline{A_2A_3}$ é igual ao comprimento do segmento anterior multiplicado por $\frac{1}{2}$, pois veja que os triângulos formados pelos respectivos segmentos $\overline{A_nA_{n+1}}$ e os lados dos triângulos equiláteros são semelhantes e sempre sendo reduzidos à metade do comprimento anterior. Então queremos:

$$2p=L+\frac{L\sqrt{3}}{2}+\frac{L\sqrt{3}}{4}+\frac{L\sqrt{3}}{8}+\ldots$$

Que caracteriza uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$ a partir da segunda parcela. Então:

$$2p=L+\frac{\frac{L\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}\Rightarrow 2p=(1+\sqrt{3})L$$

Opção B.

9) Vamos analisar cada opção:
a) Falsa. Seja x o valor. Dois aumentos sucessivos de 10% correspondem a $(1,1)^2\cdot x=1,21\cdot x$, que é um aumento de 21% e não de 20%.
b) Verdadeira. Veja: $\frac{x}{100}\cdot y=x\cdot\frac{y}{100}$.
c) Falsa. Para obter este resultado fazemos:

$$p+\frac{30}{100}p=\frac{130}{100}p=1,30p$$

d) Falsa. Seja x o valor inicial. Primeiro vamos aumentar este valor de $m\%$:

$$x+\frac{m}{100}\cdot x$$

Sobre este valor faremos o desconto de $m\%$:

$$x+\frac{m}{100}\cdot x-\left(x+\frac{m}{100}\cdot x\right)\cdot\frac{m}{100}$$

Teremos:

$$x+\frac{mx}{100}-\frac{mx}{100}-\left(\frac{m}{100}\right)^2\cdot x=x-\left(\frac{m}{100}\right)^2\cdot x=x-\frac{\frac{m^2}{100}}{100}\cdot x$$

Portanto teremos, ainda, um desconto de $\frac{m^2}{100}\%$ sobre x. Logo, opção B.

10) Na diagonal principal, sempre temos $i=j$, como são 10 linhas, os elementos desta diagonal terão, para o traço da matriz $\mathrm{Tr}(M)$, o seguinte valor:

$$\mathrm{Tr}(M)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{10\,10}$$

Logicamente:

$$\mathrm{Tr}(M)=1+1+2+2+\ldots+10+10$$

Que corresponde à série:

$$\mathrm{Tr}(M)=2+4+\ldots+20=\frac{(2+20)\cdot 10}{2}=110$$

Opção C.

Gabarito

Q1. A	**Q5.** A	**Q9.** B
Q2. C	**Q6.** A	**Q10.** C
Q3. D	**Q7.** D	
Q4. B	**Q8.** D	