

Questão enviada por Sebastião Soares

Se $a = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ e $b = \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$, então $a + b$ é igual a:

- a) $\sqrt{10}$ b) 4 c) $2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{5} + 1$ e) $\sqrt{3} + 2$

Solução: Queremos calcular $a + b$:

$$a + b = \sqrt{4 - \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{4 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$$

Façamos $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = x$. Elevando ao quadrado ambos os membros da equação:

$$(a + b)^2 = (\sqrt{4 - x} + \sqrt{4 + x})^2$$

Lembrando que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ e desenvolvendo:

$$(a + b)^2 = 4 - x + 2 \cdot (\sqrt{4 - x}) \cdot (\sqrt{4 + x}) + 4 + x$$

Então:

$$(a + b)^2 = 8 + 2 \cdot \sqrt{(4 - x) \cdot (4 + x)}$$

E, portanto:

$$(a + b)^2 = 8 + 2 \cdot \sqrt{16 - x^2}$$

Substituindo o valor de x :

$$(a + b)^2 = 8 + 2 \cdot \sqrt{16 - (10 + 2\sqrt{5})}$$

E teremos:

$$(a + b)^2 = 8 + 2 \cdot \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$$

Mas veja que:

$$(\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 6 - 2\sqrt{5}$$

Logo:

$$(a + b)^2 = 8 + 2 \cdot (\sqrt{5} - 1) \Rightarrow (a + b)^2 = 6 + 2\sqrt{5}$$

De novo:

$$(\sqrt{5} + 1)^2 = 5 + 2\sqrt{5} + 1 = 6 + 2\sqrt{5}$$

Então:

$$(a + b)^2 = (\sqrt{5} + 1)^2$$

Como a e b são positivos, temos $a + b = \sqrt{5} + 1$ que está na opção D.