Soluções Comentadas

Matemática

Curso Mentor

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UERJ

L. S. Barbosa

17 de setembro de 2011

Vestibular 2011/2012

2º Exame de Qualificação

Questão 22

As figuras a seguir mostram dois pacotes de café em pó que têm a forma de paralelepípedos retângulos semelhantes.

Se o volume do pacote maior é o dobro do volume do menor, a razão entre a medida da área total do maior pacote e a do menor é igual a:
(A) $\sqrt[3]{3}$
(B) $\sqrt[3]{4}$
(C) $\sqrt{6}$
(D) $\sqrt{8}$

Solução:
Seja o pacote maior de medidas a, b e c. Como o outro pacote é semelhante ao primeiro, ele possui medidas e, f e g tais que:

$$\begin{cases} e = ka \\ f = kb \\ g = kc \end{cases}$$

Chamemos de V o volume do pacote maior e v o volume do menor. Calculando estes valores temos:

$$\begin{cases} V = abc \\ v = efg \end{cases}$$

Calculando a relação entre V e v temos:

$$\frac{V}{v} = \frac{abc}{efg}$$

Que pode ser escrita como:

$$\frac{V}{v} = \frac{abc}{ka \cdot kb \cdot kc}$$

$$\frac{V}{v} = \frac{abc}{k^3(abc)}$$

Como o volume do maior é o dobro do menor temos:

$$\frac{2}{1} = \frac{1}{k^3}$$

O que nos dá:

$$k = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Sabemos que a área total S de um paralelepípedo de medidas x, y e z é dada por:

$$S = 2(xy + yz + xz)$$

Seja S a área total do pacote maior e s a área do menor. Usando esta expressão da área e o valor encontrado para k:

$$\frac{S}{s} = \frac{2(ab + bc + ac)}{2(ka \cdot kb + kb \cdot kc + ka \cdot kc)}$$

Desenvolvendo:

$$\frac{S}{s} = \frac{2(ab + bc + ac)}{2k^2(ab + bc + ac)}$$

Então:

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{k^2}$$

$$\frac{S}{s} = \frac{1}{\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2}} \Rightarrow \frac{S}{s} = \sqrt[3]{4}$$

Opção B

Questão 28

Uma família deseja organizar todas as fotos de uma viagem em um álbum com determinado número de páginas, sem sobra de fotos ou de páginas. Para isso, foram testados dois critérios de organização.
O primeiro critério, que consistia na colocação de uma única foto em cada página, foi descartado, uma vez que sobraram 50 fotos.
Com a adoção do segundo critério, a de uma única foto em algumas página e de três fotos nas demais, não sobraram fotos nem páginas, e o objetivo da família foi alcançado.
O número total de páginas em que foram colocadas três fotos é igual a:
(A) 15
(B) 25

(C) 50
(D) 75

Solução:
Sejam as variáveis do problema:
T: total de páginas com três fotos;
U: total de páginas com uma foto; e
f: total de fotos.
Podemos então escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} T + U + 50 = f \\ 3T + U = f \end{cases}$$

Igualando a primeira e a segunda a equação:

$$T + U + 50 = 3T + U$$

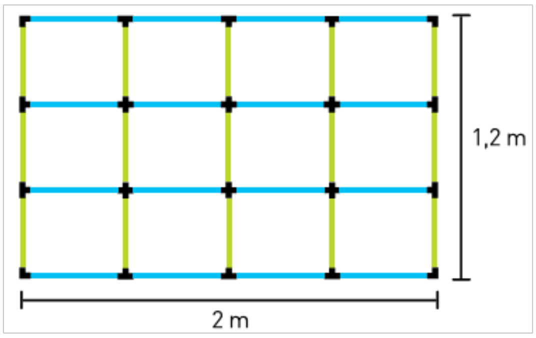
Então:

$$T + 50 = 3T \Rightarrow 2T = 50 \Rightarrow T = 25$$

Opção B

Questão 35

Uma grade retangular é montada com 15 tubos de 40 cm na posição vertical e com 16 tubos de 50 cm na horizontal. Para esse tipo de montagem, são utilizados encaixes nas extremidades dos tubos, como ilustrado abaixo:



Se a altura de uma grade como essa é igual ao comprimento de x tubos, e a largura equivale ao comprimento de y tubos, a expressão que representa o número total de tubos usados é:
(A) $x^2 + y^2 + x + y - 1$
(B) $xy + x + y + 1$
(C) $xy + 2x + 2y$
(D) $2xy + x + y$

Solução:
Para solucionar este problema, devemos notar que se há x tubos em uma linha

na horizontal, há $x+1$ colunas verticais, cada uma contendo y tubos. Isto nos dá a seguinte quantidade total de tubos na horizontal (H):

$$H = (x+1)y$$

Além disso, notamos que se há y tubos em uma linha na vertical, há $y+1$ colunas horizontais, cada uma contendo x tubos. Isto nos dá a seguinte quantidade total de tubos na vertical (V):

$$V = (y+1)x$$

Queremos a quantidade total $H+V$, daí:

$$H + V = (x+1)y + (y+1)x$$

Desenvolvendo:

$$H + V = xy + y + xy + x \Rightarrow H + V = 2xy + y + x$$

Opção D

Questão 38

Em uma viagem ao exterior, o carro de um turista brasileiro consumiu, em uma semana, 50 galões de gasolina, a um custo total de 152 dólares. Considere que um dólar, durante a semana da viagem, valia 1,60 reais e que a capacidade do galão é de 3,8 L. Durante essa semana, o valor, em reais, de 1 L de gasolina era de:
(A) 1,28
(B) 1,40
(C) 1,75
(D) 1,90

Solução:
Cada galão tem capacidade de 3,8 L como foram 50 galões:

$$50 \times 3,8 = 190\,\mathrm{L}$$

Sabemos que um dólar, durante a semana da viagem, valia 1,60 reais e que o turista teve um custo total de 152 dólares, então:

$$152 \times 1,6 = 243,2\,\mathrm{reais}$$

Dividindo o gasto total em R$ pela quatidade total de litros temos o valor em R$/L:

$$\frac{243,2}{190} = 1,28\,\mathrm{R\$/L}$$

Opção A

Questão 42

A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição do critério	Exemplo de Placa
X	três letras e três algarismos em qualquer ordem	M3MK09
Y	um bloco de três letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X igual a n e no país Y igual a p. A razão $\frac{n}{p}$ corresponde a:

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 6

Solução:
Vamos verificar como se comporta cada placa. No país X as placas são da forma LLLNNN, onde "L" são as possíveis letras e "N", os números. Como letras e números não estão necessariamente agrupados, precisamos verificar quantas são as maneiras de ordenar três letras e três números:

$$P_6^{3,3}$$

Que é uma permutação de 6 elementos com duas repetições de três elementos. Então:

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!}$$

Daí:

$$P_6^{3,3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{6 \cdot 3!} \Rightarrow P_6^{3,3} = \frac{5 \cdot 4}{1}$$

$$P_6^{3,3} = 20$$

Colocando agora as possibilidades para L e N e, usando o princípio multiplicativo:

$$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \times 20 \Rightarrow n = 26^3 \cdot 10^3 \cdot 20$$

Para o país Y devemos ter três letras seguidas de quatro números. Usando o princípio multiplicativo:

$$p = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \Rightarrow p = 26^3 \cdot 10^4$$

Calculando então $\frac{n}{p}$:

$$\frac{n}{p} = \frac{26^3 \cdot 10^3 \cdot 20}{26^3 \cdot 10^4}$$

$$\frac{n}{p} = \frac{20}{10} \Rightarrow \frac{n}{p} = 2$$

Opção B