CURSO MENTOR

Soluções Comentadas Matemática

Processo Seletivo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante

Versão 1.8

05/02/2011

Este material contém soluções comentadas das questões de matemática do processo seletivo da Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante.

Soluções das Questões de Matemática do Processo Seletivo de Admissão à Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante — EFOMM

Concurso 2009/2010

Questão 1

Analise as afirmativas abaixo.

I. Seja K o conjunto dos quadriláteros planos, seus subconjuntos são:
$P = \{x \in K \mid x \text{ possui lados opostos paralelos}\}$;
$L = \{x \in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes}\}$;
$R = \{x \in K \mid x \text{ possui 4 ângulos retos}\}$; e
$Q = \{x \in K \mid x \text{ possui 4 lados congruentes e 2 ângulos com medidas iguais}\}$.
Logo, $L \cap R = L \cap Q$.

II. Seja o conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, nota-se que A possui somente 4 subconjuntos.

III. Observando as seguintes relações entre conjuntos:
$\{a, b, c, d\} \cup Z = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup Z = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap Z = \{c\}$; pode-se concluir que $Z = \{a, c, e\}$.

Em relação às afirmativas acima, assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(E) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

Solução:

Analisando cada uma das afirmativas:

I. **Falsa.** Os conjuntos P, L e R são definições de quadriláteros conhecidos: P é o conjunto dos paralelogramos, L é o conjunto dos losangos, R é o conjuntos dos retângulos. O conjunto Q representa os losangos também, embora "ter 4 lados iguais" é condição necessária e suficiente para ser losangos. Dada esta análise temos que: $L \cap R$ representa o conjunto dos quadrados que atendem ambas as condições; $L \cap Q$ é o próprio conjunto dos losangos. Daí temos que $L \cap R \neq L \cap Q$. Lembre que todo quadrado é losango – possui 4 lados iguais – mas nem todo losango é quadrado.

II. **Falsa.** O número de subconjuntos de um conjunto é dado pela expressão 2^n. Onde **n** é o número de elementos do conjunto dado. Assim o número de subconjuntos de A é $2^4 = 16$.

III. **Verdadeira.** Seja a definição da união de conjuntos:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\} \quad (1.1)$$

Usando esta definição vamos analisar cada proposição:

Como $\{a, b, c, d\} \cup Z = \{a, b, c, d, e\}$, concluímos que $e \in Z$, pois ele aparece na união;

Temos que $\{c, d\} \cup Z = \{a, c, d, e\}$, concluímos que $a \in Z$, pelo mesmo motivo anterior;

A definição da interseção é

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\} \quad (1.2)$$

Usando esta definição e vendo que $\{b, c, d\} \cap Z = \{c\}$, pode-se concluir que $b \notin Z$ e $d \notin Z$. Pela definição de interseção $c \in Z$. Assim concluímos que $Z = \{a, c, e\}$.

Opção D

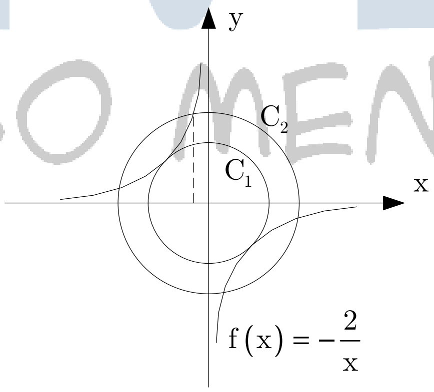
Questão 2

Considere a função real **f**, definida por $f(x) = -\frac{2}{x}$ e duas circunferências C_1 e C_2 centradas na origem. Sabe-se que C_1 tangencia o gráfico de **f**, e que um ponto de abscissa $-\frac{1}{2}$ pertence a C_2 e ao gráfico de **f**. Nessas condições, a área da coroa circular, definida por C_1 e C_2, é igual a

(A) $\frac{65\pi}{4}$ (B) $\frac{49\pi}{4}$ (C) $\frac{25\pi}{4}$ (D) $\frac{9\pi}{4}$ (E) $\frac{\pi}{4}$

Solução:

Para facilitar o entendimento, façamos um gráfico contendo as circunferências e a função **f**:



Como o ponto de abscissa $x = -\frac{1}{2}$ pertence a **f** podemos usá-lo na expressão da função:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4$$

Usando a expressão da circunferência C_2 podemos achar seu raio:

$$C_2 : x^2 + y^2 = R^2$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2 = R^2$$

$$\frac{1}{4} + 16 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{64+1}{4}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Seja a equação de C_1:

$$C_1 : x^2 + y^2 = r^2$$

Seja (x_0, y_0) o ponto de tangencia entre C_1 e **f**. Vamos derivar a expressão de f em função de x:

$$f(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \left(-2x^{-1}\right)' \Rightarrow f'(x) = (-2)\cdot(-1)\cdot x^{-2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x^2}$$

Como a tangente é única vamos derivar a expressão de C_1. Mas antes vamos escrevê-la em função de $f_1(x)$:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x^2 + \left[f_1(x)\right]^2 = r^2 \Rightarrow f_1(x) = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

Podemos tomar somente a porção negativa de $f_1(x)$, ou seja consideramos que a derivada é positiva, bem como x_0:

$$f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

Vamos derivar $f_1(x)$:

$$f_1(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \Rightarrow f_1'(x) = -\left[\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]'$$

$$f_1'(x) = -\left[\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' \Rightarrow f_1'(x) = -\frac{1}{2}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x)$$

$$f_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{\left(r^2 - x^2\right)}}$$

Agora igualamos as derivadas em x_0:

$$f'(x_0) = f_1'(x_0)$$

Então:

$$\textbf{(1)}\quad \frac{x_0}{\sqrt{\left(r^2 - x_0^{\ 2}\right)}} = \frac{2}{x_0^{\ 2}}$$

Devemos lembrar que o ponto (x_0, y_0) pertence tanto a f quanto a C_1, ou seja:

$$\textbf{(2)}\quad x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = r^2$$

E

$$\textbf{(3)}\quad y_0 = -\frac{2}{x_0}$$

Desenvolvendo a equação **(1)**:

$$\frac{x_0}{\sqrt{\left(r^2 - x_0^{\ 2}\right)}} = \frac{2}{x_0^{\ 2}}$$

$$x_0^{\ 3} = 2\sqrt{\left(r^2 - x_0^{\ 2}\right)}$$

$$\textbf{(4)}\quad x_0^{\ 6} = 4\left(r^2 - x_0^{\ 2}\right)$$

Substituindo **(3)** em **(2)**:

$$x_0^2 + \left(-\frac{2}{x_0}\right)^2 = r^2$$

$$\textbf{(5)}\quad x_0^2 + \frac{4}{x_0^2} = r^2$$

Substituindo **(5)** em **(4)**:

$$x_0^6 = 4\left(x_0^2 + \frac{4}{x_0^2} - x_0^2\right)$$

$$x_0^6 = 4\left(\frac{4}{x_0^2}\right)$$

Logo:

$$x_0^8 = 16 \Rightarrow x_0 = \sqrt[8]{2^4} \Rightarrow x_0 = \sqrt{2}$$

Da equação **(3)**:

$$y_0 = -\frac{2}{x_0} \Rightarrow y_0 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow y_0 = -\sqrt{2}$$

O raio de C_1:

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

A área **S** da coroa circular é:

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 \Rightarrow S = \pi\left[\left(\frac{\sqrt{65}}{2}\right)^2 - 2^2\right] \Rightarrow S = \pi\left[\frac{65}{4} - 4\right] \Rightarrow S = \frac{49\pi}{4}$$

Opção B

Questão 3

Considere a equação de incógnita real x:

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos 4x$$

Se $x_0 \in (0, \pi)$ é uma de suas soluções e x_0 centímetros é a medida da diagonal de um cubo, então a área da superfície total desse cubo, em cm², é igual a

(A) $\frac{3\pi^2}{8}$ (B) $\frac{\pi^2}{2}$ (C) 6 (D) $\frac{27\pi^2}{8}$ (E) $6\pi^2$

Solução:

Vamos desenvolver a expressão:

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos\left[2\cdot(2x)\right]$$

Como $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$:

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos^2 2x - \text{sen}^2 2x$$

Mas $\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos^2 2x - \left(1 - \cos^2 2x\right)$$

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = \cos^2 2x - 1 + \cos^2 2x$$

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 2\cos^2 2x - 1$$

Expandindo $\cos^2 2x$:

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 2\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)^2 - 1$$

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1$$

$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) - 1$$
$$2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 2 - 1$$
$$6\cos^4 x - 6\cos^2 x = 0$$
$$6\cos^2 x\left(\cos^2 x - 1\right) = 0$$

Então:

$$6\cos^2 x = 0 \text{ ou } \cos^2 x - 1 = 0$$

Resolvendo cada equação:

$$\mathbf{1)}\ 6\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$$
$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Só teremos solução para $k = 0$, pois $x = \frac{\pi}{2}$.

$$\mathbf{2)}\ \cos^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm 1$$
$$x = 0 + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Teremos solução para:

$$k = 0 \to x = 0$$
$$k = 1 \to x = \pi$$

Como o intervalo é aberto temos somente a solução $x = \frac{\pi}{2}$.

A diagonal de um cubo de aresta a é dada pela expressão:

$$d = a\sqrt{3}$$
$$\frac{\pi}{2} = a\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

Calculando a área total do cubo:

$$S = 6a^2$$
$$S = 6\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right)^2$$
$$S = 6 \cdot \frac{\pi^2}{4 \cdot 3} \Rightarrow S = \frac{\pi^2}{2}$$

Opção B

Questão 4

O valor numérico da expressão $\dfrac{\cos\frac{44\pi}{3} - \sec 2400° + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cos\,sec}^2(-780°)}$ é igual a

(A) 1 (B) $-\frac{3}{4}$ (C) $\frac{4}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) $\frac{3}{8}$

Solução:

Vamos desenvolver a expressão **E** dada:

$$E = \frac{\cos\frac{44\pi}{3} - \sec 2400° + \operatorname{tg}\left(-\frac{33\pi}{4}\right)}{\operatorname{cos\,sec}^2(-780°)}$$

$$E=\frac{\cos\left(14\pi+\frac{2\pi}{3}\right)-\sec\left(6\cdot 360°+240°\right)+\operatorname{tg}\left(-8\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\sec^2\left(-2\cdot 360°-60°\right)}$$

$$E=\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sec\left(240°\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\sec^2\left(-60°\right)}$$

$$E=\frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)-\sec\left(240°\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{\cos\sec^2\left(300°\right)}$$

$$E=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\cos\left(240°\right)}-1}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(300°\right)}}$$

$$E=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\cos\left(240°\right)}-1}{\frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(300°\right)}}$$

$$E=\frac{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)-1}{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$E=\frac{-1}{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}\Rightarrow E=-\frac{3}{4}$$

Opção B

Questão 5

João construiu um círculo de papel com centro O e raio 4 cm (Figura 1). Traçou dois diâmetros AC e BD perpendiculares e, em seguida dobrou o papel fazendo coincidir A, O e C, conforme sugere a Figura 2.

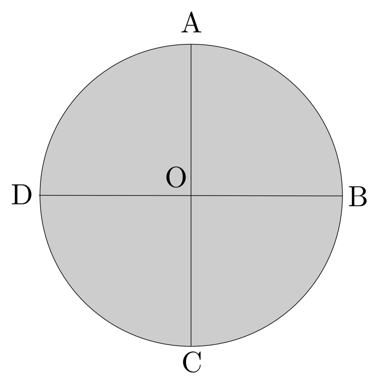


Figura 1

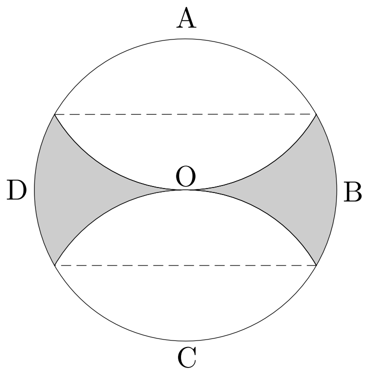


Figura 2

A área da parte do círculo não encoberta pelas dobras, sombreada na Figura 2, é igual a

(A) $\frac{1}{3}\left(96-16\pi\right)\ \text{cm}^2$

(B) $\frac{1}{3}\left(16\pi-48\right)\ \text{cm}^2$

(C) $\frac{1}{3}\left(16\pi-12\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

(D) $\frac{1}{3}\left(16\pi+12\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

(E) $\frac{1}{3}\left(32\pi+12\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$

Solução:
Sejam **E** e **F** os pontos de interseção da dobra com o círculo, como sugere a Figura 3:

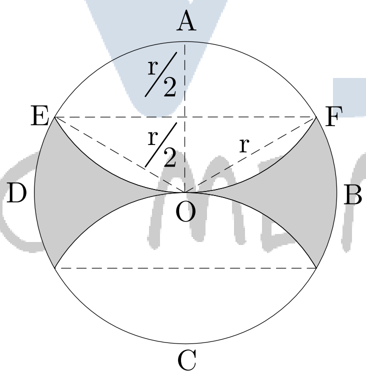


Figura 3

Calculando o cosseno do ângulo $A\hat{O}F$ teremos:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{r}{2}}{r} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r}{2}\cdot\frac{1}{r} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

Portanto:

$$\alpha = 60°$$

Ou seja, o arco EF vale 120°. A área **S** do triângulo EFO vale:

$$S = \frac{EF\cdot\frac{r}{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{EF\cdot\frac{4}{2}}{2} \Rightarrow S = EF$$

Calculando EF:

$$4^2 = 2^2 + \left(\frac{EF}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{EF}{2}\right)^2 = 16 - 4 \Rightarrow EF = 2 \cdot \sqrt{12} \Rightarrow EF = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Calculamos agora a área **A** da "folha" EAF. Ela é determinada pela diferença entre a área de um setor circular de 120° e o triângulo:

$$A = \underbrace{\frac{\pi r^2}{3}}_{\substack{\text{Área de um} \\ \text{setor de 120°}}} - \underbrace{4\sqrt{3}}_{\substack{\text{Área do} \\ \text{triângulo EFO}}}$$

$$A = \frac{\pi \cdot (4)^2}{3} - 4\sqrt{3} \Rightarrow A = \frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3}$$

Como são **4 folhas,** basta subtrair da área do círculo:

$$S_{\text{Hachurada}} = \pi \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{16\pi - 12\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\text{Hachurada}} = 16\pi - \frac{64\pi - 48\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{\text{Hachurada}} = \frac{48\pi - 64\pi + 48\sqrt{3}}{3} \Rightarrow S_{\text{Hachurada}} = \frac{48\sqrt{3} - 16\pi}{3} \Rightarrow S_{\text{Hachurada}} = \frac{1}{3}\left(48\sqrt{3} - 16\pi\right) \text{cm}^2$$

Sem Opção

Questão 6

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função estritamente decrescente quaisquer x_1 e x_2 reais com $x_1 < x_2$ tem-se $f(x_1) > f(x_2)$. Nessas condições analise as afirmativas abaixo:

I – f é injetora.
II – f pode ser uma função par.
III – Se f possui inversa então sua inversa é estritamente decrescente.

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas as afirmativas I e III são verdadeiras.
(C) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras.
(D) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(E) Apenas a afirmativa II é verdadeira.

Solução:

Para solucionar esta questão, vamos fazer um gráfico de uma função estritamente decrescente entre x_1 e x_2.

I – **Verdadeira.** Por definição, uma função estritamente decrescente tem para quaisquer intervalos contidos em seu domínio que

$$x_1 > x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Ou seja, não há pontos em que

$$x_1 \neq x_2 \text{ e } f(x_1) = f(x_2)$$

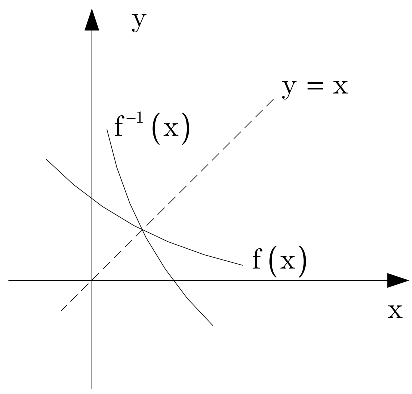
Que é justamente a definição de função injetora.

II – **Falsa.** Para que uma função seja par devemos ter

$$x_1 = -x_2 \text{ e } f(x_1) = f(x_2)$$

Isto implicaria que a função f não seria estritamente decrescente.

III – **Verdadeira.** Basta analisar o gráfico abaixo. Repare que f é estritamente decrescente e sua inversa – que é simétrica em relação à função $y = x$ – também é estritamente decrescente.



Opção B

Questão 7

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $X = A \cdot B$, O determinante da matriz $2X^{-1}$ é igual a

(A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) 1 (D) $\frac{8}{3}$ (E) 6

Solução:
Existe uma propriedade dos determinantes relacionada com o produto de matrizes:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Portanto

$$\det X = \det A \cdot \det B$$

Ambas as matrizes são triangulares, ou seja, abaixo (ou acima) da diagonal principal têm seus elementos nulos. O determinante de uma matriz triangular é o produto dos elementos da sua diagonal:

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \Rightarrow \det A = 6$$
$$\det B = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \Rightarrow \det B = 1$$

A matriz inversa também tem uma propriedade em relação ao determinante:

$$\det X^{-1} = \frac{1}{\det X}$$

Outra propriedade diz respeito ao produto de um número real por uma matriz e seu determinante:

$$\det(aX) = a^n \det X \text{, onde } \mathbf{n} \text{ é a ordem da matriz}$$

Portanto,

$$\det(2X^{-1}) = 2^4 \cdot \frac{1}{\det X} \Rightarrow \det(2X^{-1}) = 2^4 \cdot \frac{1}{\det A \cdot \det B}$$

Substituindo os valores encontrados anteriormente:

$$\det(2X^{-1}) = 16 \cdot \frac{1}{6 \cdot 1} \Rightarrow \det(2X^{-1}) = \frac{8}{3}$$

Opção D

Questão 8

Considere o conjunto dos números complexos Z com a propriedade $|Z+169i| \le 65$ admitindo que i é a unidade imaginária. O elemento desse conjunto que possui o maior argumento θ, $0 \le \theta < 2\pi$, é igual a

(A) $60-144i$
(B) $65-169i$
(C) $-104i$
(D) $-65-169i$
(E) $65-156i$

Solução:

Seja $Z = x + yi$ o número complexo dado. Aplicando à expressão teremos:

$$|x+yi+169i| \le 65$$

Daí:

$$|x+(y+169)i| \le 65$$

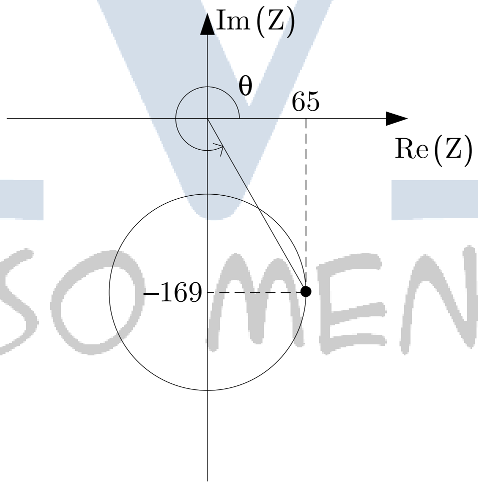
Calculando o módulo do número complexo:

$$\sqrt{x^2+(y+169)^2} \le 65$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$x^2+(y+169)^2 \le (65)^2$$

Que é uma equação de uma circunferência de raio 65 e centro $C(0,-169)$. Representando no plano de Argand-Gauss:



Note que o argumento na figura é o maior possível para o número complexo Z dado. Ou seja, $Z = 65-169i$.

Opção B

Questão 9

A equação $\sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x}} = 13 + \sqrt{217 - 13 \cdot \sqrt[3]{x}}$ tem uma solução inteira positiva x_1. O número de divisores inteiros e positivos de x_1 é:

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

Solução:

Vamos desenvolver a expressão dada:

$$\sqrt[4]{x\cdot\sqrt[3]{x}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$
$$\sqrt[4]{x\cdot x^{\frac{1}{3}}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$
$$\sqrt[4]{x^{1+\frac{1}{3}}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$
$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$
$$x^{\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$
$$x^{\frac{1}{3}}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}\Rightarrow\sqrt[3]{x}=13+\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$
$$\sqrt[3]{x}-13=\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\left(\sqrt[3]{x}-13\right)^2=\left(\sqrt{217-13\cdot\sqrt[3]{x}}\right)^2\Rightarrow\sqrt[3]{x^2}-26\sqrt[3]{x}+169=217-13\cdot\sqrt[3]{x}$$
$$\sqrt[3]{x^2}-13\sqrt[3]{x}-48=0$$

Fazendo $\sqrt[3]{x}=M$ teremos:

$$M^2-13M-48=0$$
$$\Delta=(-13)^2-4\cdot1\cdot(-48)$$
$$\Delta=169+192$$
$$\Delta=361$$
$$M_{1,2}=\frac{-(-13)\pm\sqrt{361}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}M_1=\dfrac{13+19}{2}\Rightarrow M_1=\dfrac{32}{2}\Rightarrow M_1=16\\ M_2=\dfrac{13-19}{2}\Rightarrow M_2=\dfrac{-6}{2}\Rightarrow M_2=-3\end{cases}$$
$$M_1=16\Rightarrow\sqrt[3]{x}=16\Rightarrow x_1=(16)^3\Rightarrow x_1=\left(2^4\right)^3\Rightarrow x_1=2^{12}$$
$$M_2=-3\Rightarrow\sqrt[3]{x}=-3\Rightarrow x_2=(-3)^3\Rightarrow x_2=-27$$

A segunda solução não serve, pois não é positiva. O número de divisores é dado por:

$$12+1=13\text{ divisores}$$

Opção D

Questão 10

Sabendo que o $\log_{30}3=a$ e $\log_{30}5=b$, que opção representa $\log_{10}2$?

(A) $\frac{1-a-b}{2+a}$ (B) $\frac{1-a-b}{a-1}$ (C) $\frac{1-a-b}{1+a}$ (D) $\frac{1-a-b}{2-a}$ (E) $\frac{1-a-b}{1-a}$

Solução:

Vamos colocar os logaritmos dados na base 10:

$$\log_{30}3=a\Rightarrow\frac{\log_{10}3}{\log_{10}30}=a\Rightarrow\frac{\log_{10}3}{\log_{10}(3\cdot10)}=a\Rightarrow\frac{\log_{10}3}{\log_{10}3+\log_{10}10}=a\Rightarrow\frac{\log_{10}3}{\log_{10}3+1}=a$$

Agora basta isolarmos $\log_{10}3$ na expressão anterior:

$$\frac{\log_{10}3}{\log_{10}3+1}=a\Rightarrow\log_{10}3=a\log_{10}3+a\Rightarrow\log_{10}3=\frac{a}{1-a}$$

Vamos ao outro logaritmo:

$$\log_{30} 5 = b \Rightarrow \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 30} = b \Rightarrow \frac{\log_{10} 5}{\log_{10}(3 \cdot 10)} = b \Rightarrow \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3 + \log_{10} 10} = b \Rightarrow \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 3 + 1} = b$$

Usando o resultado anterior:

$$\frac{\log_{10} 5}{\underbrace{\left(\frac{a}{1-a}\right)}_{\log_{10} 3} + 1} = b$$

Isolando $\log_{10} 5$:

$$\frac{\log_{10} 5}{\underbrace{\left(\frac{a}{1-a}\right)}_{\log_{10} 3} + 1} = b \Rightarrow \log_{10} 5 = b\left(\frac{a}{1-a}\right) + b \Rightarrow \log_{10} 5 = \frac{ab + b - ab}{1-a} \Rightarrow \log_{10} 5 = \frac{b}{1-a}$$

Calculamos agora o logaritmo pedido:

$$\log_{10} 2 = \log_{10} \frac{10}{5} = \log_{10} 10 - \log_{10} 5 = 1 - \frac{b}{1-a} = \frac{1-a-b}{1-a}$$

Opção E

Questão 11

Os pontos $A\left(-4, \frac{10}{3}\right)$, $B(-4, 0)$, $C(0, 0)$ e $D(a, b)$ são vértices de um quadrilátero circunscrito a uma circunferência. A equação da reta AD é representada por

(A) $y = \frac{5}{12}x + 5$

(B) $y = \frac{4}{3}$

(C) $y = \frac{12}{5}x + 1$

(D) $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$

(E) $y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2}$

Solução:

Queremos uma reta que passe por $A\left(-4, \frac{10}{3}\right)$. Utilizando as opções para conferir teremos:

(A) **Correta.** $y = \frac{5}{12}x + 5 \Rightarrow y = \frac{5}{12} \cdot (-4) + 5 \Rightarrow y = -\frac{20}{12} + 5 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$

(B) **Falsa.**

(C) **Falsa.** $y = \frac{12}{5}x + 1 \Rightarrow y = \frac{12}{5} \cdot (-4) + 1 \Rightarrow y = -\frac{48}{5} + 1 \Rightarrow y = -\frac{43}{5}$

(D) **Falsa.** $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{-4}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

(E) **Falsa.** $y = \frac{5}{12}x + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{12} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{20}{12} + \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{7}{6}$

Observação: Esta é uma solução não formal. Por enquanto, não encontramos nenhuma solução mais formal que fosse viável do ponto de vista do tempo. Atualizaremos este arquivo assim que encontrarmos.

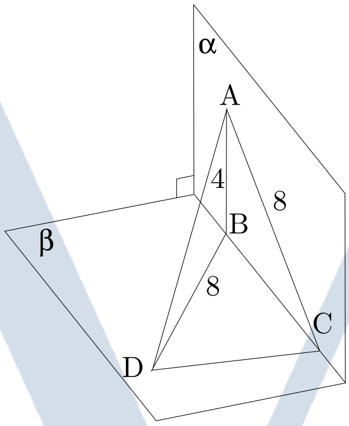
Opção A

Questão 12

Sejam ABC e BCD dois triângulos retângulos congruentes, contidos em planos perpendiculares, com hipotenusas $\overline{AC} = \overline{BD} = 8$ m e cateto $\overline{AB} = 4$ m. O volume, em m^3, do tetraedro ABCD definido peles vértices desses triângulos é igual a

(A) $16\sqrt{3}$ (B) $8\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ (D) $\dfrac{32}{3}$ (E) $\dfrac{32\sqrt{3}}{3}$

Solução:
De acordo com o enunciado temos a figura abaixo:



No triângulo ABC temos que:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$
$$8^2 = BC^2 + 4^2$$
$$BC = \sqrt{64-16} \Rightarrow BC = \sqrt{48} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$$

Aplicando este resultado ao triângulo BCD:

$$BD^2 = BC^2 + DC^2$$
$$64 = 48 + DC^2$$
$$DC = 4$$

O que confirma a congruência dos triângulos. O volume do tetraedro:

$$V = \frac{1}{3} S_{Base} \cdot H$$
$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4\sqrt{3} \cdot 4}{2} \cdot 4 \Rightarrow V = \frac{32\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3$$

Observação: Repare que só é possível calcular rapidamente o volume porque os planos são perpendiculares e a altura AB está contida no plano α e a base no plano β.

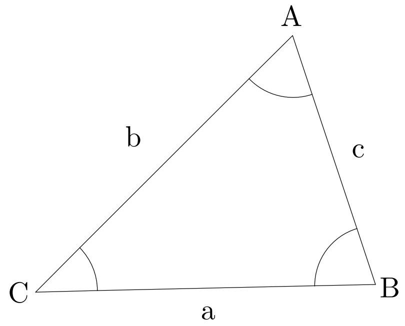
Opção E

Questão 13

As medidas dos lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$ de um triângulo ABC formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente. Os ângulos internos $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ desse triângulo possuem a seguinte propriedade: $\text{sen}^2\hat{A} + \text{sen}^2\hat{B} - \text{sen}^2\hat{C} - 2\,\text{sen}\hat{A} \cdot \text{sen}\hat{B} \cdot \cos\hat{C} = \cos^2\hat{C}$. Se o perímetro do triângulo mede $3\sqrt{3}$ m, sua área, em m^2, é igual a:

(A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{9}{8}$ (D) 2 (E) 4

Solução:
Para facilitar vamos usar a figura abaixo como base:



De acordo com o enunciado temos a seguinte P.A.:

$$(b, a, c)$$

Pela propriedade das P.A.'s temos:

$$\textbf{(1)}\ a = \frac{b+c}{2}$$

Usando a lei dos cossenos sobre o ângulo em C temos:

$$\textbf{(2)}\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\hat{C}$$

A partir da expressão:

$$\text{sen}^2\hat{A} + \text{sen}^2\hat{B} - \text{sen}^2\hat{C} - 2\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = \cos^2\hat{C}$$

$$\text{sen}^2\hat{A} + \text{sen}^2\hat{B} - \text{sen}^2\hat{C} - 2\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = 1 - \text{sen}^2\hat{C}$$

$$\textbf{(3)}\ \text{sen}^2\hat{A} + \text{sen}^2\hat{B} - 2\text{sen}\hat{A}\cdot\text{sen}\hat{B}\cdot\cos\hat{C} = 1$$

Da lei dos senos temos:

$$\textbf{(4)}\ \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}}$$

Da equação **(2)**:

$$\textbf{(5)}\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\hat{C} \Rightarrow \cos\hat{C} = \frac{-c^2 + b^2 + a^2}{2ab}$$

Da equação **(4)**:

$$\textbf{(6)}\ \frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Rightarrow \text{sen}\hat{B} = \frac{b\cdot\text{sen}\hat{A}}{a}$$

Substituindo **(5)** e **(6)** em **(3)**:

$$\text{sen}^2\hat{A} + \left(\frac{b^2\text{sen}^2\hat{A}}{a^2}\right) - 2\text{sen}\hat{A}\cdot\frac{b\text{sen}\hat{A}}{a}\cdot\frac{-c^2+b^2+a^2}{2ab} = 1$$

$$\text{sen}^2\hat{A} + \frac{b^2\text{sen}^2\hat{A}}{a^2} - \frac{\left(2b\text{sen}^2\hat{A}\right)\cdot\left(-c^2+b^2+a^2\right)}{2a^2b} = 1$$

$$\frac{a^2\text{sen}^2\hat{A} + b^2\text{sen}^2\hat{A} - \left(\text{sen}^2\hat{A}\right)\cdot\left(-c^2+b^2+a^2\right)}{a^2} = 1$$

$$\text{sen}^2\hat{A}\left[a^2 + b^2 - \left(-c^2+b^2+a^2\right)\right] = a^2$$

$$\textbf{(7)}\ \text{sen}^2\hat{A} = \frac{a^2}{c^2} \Rightarrow \text{sen}\hat{A} = \frac{a}{c}$$

Substituindo **(7)** em **(4)**:

$$\frac{a}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \Rightarrow \text{sen}\hat{B} = \frac{b}{c}$$

Também da lei dos senos temos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow \frac{a}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow \text{sen}\hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = 90°$$

Da equação **(1)** e do enunciado:

$$\begin{cases} a = \dfrac{b+c}{2} \\ c^2 = b^2 + a^2 \\ a + b + c = 3\sqrt{3} \end{cases}$$

Da primeira e terceira equações deste sistema:

$$3a = 3\sqrt{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

Temos agora:

$$\begin{cases} b + c = 2\sqrt{3} \\ c^2 = b^2 + 3 \end{cases}$$

Substituindo a segunda na primeira:

$$c^2 = \left(2\sqrt{3} - c\right)^2 + 3$$

$$c^2 = 12 - 4\sqrt{3}c + c^2 + 3$$

$$4\sqrt{3}c = 15$$

$$c = \frac{15}{4\sqrt{3}} \Rightarrow c = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Finalmente calculando b:

$$b = 2\sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4} \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

A área deste triângulo:

$$S = \frac{ab}{2} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}}{2} \Rightarrow S = \frac{9}{8}\ \text{m}^2$$

Opção C

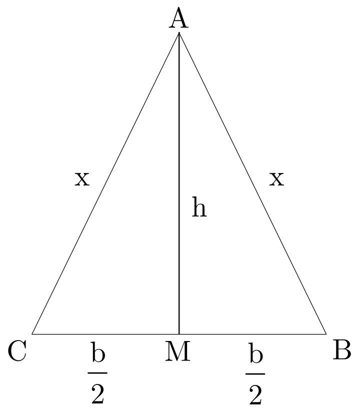
Questão 14

Um triângulo isósceles ABC, com lados $AB = AC$ e base BC, possui a medida da altura relativa à base igual à medida da base acrescida de dois metros. Sabendo que o perímetro do triângulo é igual a 36 metros, pode-se afirmar que sua base mede

(A) 8 metros (B) 9 metros (C) 10 metros (D) 11 metros (E) 12 metros

Solução:

Para facilitar o entendimento, vamos fazer uma figura ilustrativa:



De acordo com o enunciado temos:

$$\begin{cases} 2x + b = 36 \\ h = b + 2 \end{cases}$$

Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo AMB teremos:

$$x^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}$$

Da primeira equação temos:

$$x = \frac{36 - b}{2}$$

Substituindo estes resultados na terceira equação (Pitágoras):

$$\left(\frac{36 - b}{2}\right)^2 = (b + 2)^2 + \frac{b^2}{4}$$

$$\frac{36^2 - 72b + b^2}{4} = b^2 + 4b + 4 + \frac{b^2}{4}$$

$$36^2 - 72b + b^2 = 4b^2 + 16b + 16 + b^2$$

$$36^2 - 72b = 4b^2 + 16b + 16$$

$$4b^2 + 88b + 16 - 36^2 = 0$$

$$4b^2 + 88b + (4 - 36)(4 + 36) = 0$$

$$4b^2 + 88b + (-32)(40) = 0 \Rightarrow 4(b^2 + 22b - 320) = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau:

$$\Delta = 22^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-320)$$

$$\Delta = 484 + 1280$$

$$\Delta = 1764$$

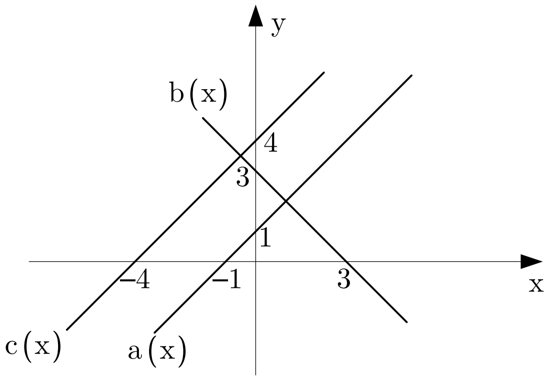
$$b_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{1764}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = \dfrac{-22 + 42}{2} \Rightarrow b_1 = \dfrac{20}{2} \Rightarrow b_1 = 10 \\ b_2 = \dfrac{-22 - 42}{2} \Rightarrow b_2 = \dfrac{-64}{2} \Rightarrow b_2 = -32 \end{cases}$$

Como a base não pode ser negativa temos que $b = 10$.

Opção C

Questão 15

O gráfico das três funções polinomiais do 1º grau *a*, *b* e *c* definidas, respectivamente, por *a(x)*, *b(x)*, e *c(x)* estão representadas abaixo:



Nessas condições, o conjunto solução da inequação $\dfrac{(a(x))^5 \cdot (b(x))^6}{(c(x))^3} \geq 0$ é

(A) $(-4,-1) \cup [3,+\infty)$

(B) $[-4,-1] \cup [3,+\infty)$

(C) $(-\infty,-4) \cup [-1,+\infty)$

(D) $[4,+\infty)$

(E) $\mathbb{R} - \{4\}$

Solução:
A potência sobre as funções **não altera suas raízes, somente sua imagem**. Então podemos montar um quadro de sinais normalmente, observando as raízes mostradas no gráfico:

	-4	-1	3	
$a(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$b(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$
$c(x)$	$-$	$+$	$+$	$+$
Q	$+$	$-$	$+$	$+$
	-4	-1	3	

Observando o gráfico temos a solução.

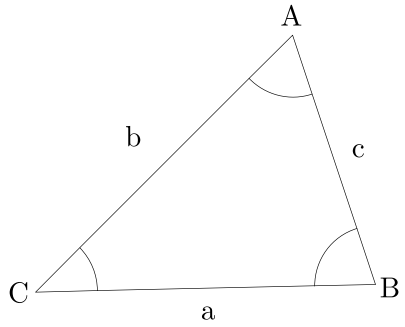
Opção C

Questão 16

Um triângulo obtusângulo ABC tem 18 cm de perímetro e as medidas de seus lados formam uma progressão aritmética crescente $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC})$. Os raios das circunferências inscrita e circunscrita a esse triângulo ABC medem, respectivamente, r e R. Se $\text{sen}\hat{A} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$ e $\text{sen}\hat{B} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$, então o produto $r \cdot R$, em cm^2, é igual a

(A) $\frac{35}{9}$ (B) $6\sqrt{6}$ (C) $3\sqrt{15}$ (D) $\frac{16}{3}$ (E) 1

Solução:
Façamos então uma figura para ilustrar o enunciado:



De acordo com enunciado:

$$(c, b, a)$$

É uma P.A. crescente.
Ou seja,

$$2b = c + a$$

Como o perímetro é 18:

$$18 = a + b + c$$

Então:

$$2b + b = 18$$
$$3b = 18 \Rightarrow b = 6$$

Da lei dos senos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = 2R$$

Podemos encontrar o valor de **R**:

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = 2R \Rightarrow R = \frac{6}{2 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16}} \Rightarrow R = \frac{16}{\sqrt{15}}$$

Calculamos agora o valor de **a**:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = 2R \Rightarrow a = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot 2 \cdot \frac{16}{\sqrt{15}} \Rightarrow a = 8$$

A razão **r** da P.A.:

$$r = a - b \Rightarrow r = 8 - 6 \Rightarrow r = 2$$

Portanto $c = 4$.
Sabemos que a área de um **triângulo circunscrito a uma circunferência** pode ser calculado por:

$$S = p \cdot r$$

E a área de um **triângulo inscrito em uma circunferência** pode ser calculado por:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Como queremos $r \cdot R$:

$$r \cdot R = \frac{S}{p} \cdot \frac{abc}{4S} \Rightarrow r \cdot R = \frac{abc}{4p}$$
$$r \cdot R = \frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 9} \Rightarrow r \cdot R = \frac{16}{3}$$

Opção D

Questão 17

Seja f uma função de domínio $D(f) = \mathbb{R} - \{a\}$. Sabe-se que o limite de $f(x)$, quando x tende a **a** é **L** e escreve-se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que, se $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Nessas condições, analise as afirmativas abaixo.

I – Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}, \text{ se } x \neq 1 \\ 3, \text{ se } x = 1 \end{cases}$, logo, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

II – Na função $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, \text{ se } x < 1 \\ -1, \text{ se } x = 1 \\ 3 - x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$, tem-se $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -3$.

III – Sejam f e g funções quaisquer, pode-se afirmar que $\lim\limits_{x \to a} (f \cdot g)^n (x) = (LM)^n$, $n \in \mathbb{N}$, se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$.

Assinale a opção correta:

(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira
(B) Apenas as afirmativas II e III são verdadeiras
(C) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras
(D) Apenas a afirmativa III é verdadeira
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras

Solução:
Vamos analisar cada uma das proposições:
I – **Falsa.** Analisando o limite teremos:

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1} \left(\frac{(x - 2)(x - 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1$$

II – **Falsa.** Pela definição da função temos que:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = -1$$

III – **Verdadeira.** É uma propriedade dos limites. Temos que:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n$$

E

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Então, usando estas duas propriedades:

$$\lim_{x \to a} (f \cdot g)^n (x) = \lim_{x \to a} \left\{ [f(x)]^n \cdot [g(x)]^n \right\} = \lim_{x \to a} [f(x)]^n \cdot \lim_{x \to a} [g(x)]^n$$

$$= \left[\lim_{x \to a} f(x) \right]^n \cdot \left[\lim_{x \to a} g(x) \right]^n = (L)^n \cdot (M)^n = (LM)^n$$

Opção D

Questão 18

A expressão $6n + n^2$ representa a soma dos n, primeiros termos de uma sequência numérica. É correto afirmar que essa sequência é uma progressão

(A) aritmética de razão 3
(B) aritmética de razão 4
(C) aritmética de razão 2

(D) geométrica de razão 4
(E) geométrica de razão 2

Solução:
Como a expressão representa a soma dos termos da sequência podemos encontrar o primeiro termo e a partir da soma descobrir o segundo:

$$\text{Soma de } \mathbf{1} \text{ termo ou primeiro termo: } a_1 = 6 \cdot 1 + 1^2 \Rightarrow a_1 = 7$$

Usando a expressão:

$$\text{Soma de } \mathbf{2} \text{ termos: } S_2 = 6 \cdot 2 + 2^2 \Rightarrow S_2 = 16$$

Mas

$$S_2 = a_2 + a_1 \Rightarrow 16 = a_2 + 7 \Rightarrow a_2 = 9$$

Somando os três termos

$$\text{Soma dos } \mathbf{3} \text{ termos iniciais: } S_3 = 6 \cdot 3 + 3^2 \Rightarrow S_3 = 27$$

Como

$$S_3 = a_3 + a_2 + a_1 \Rightarrow 27 = a_3 + 9 + 7 \Rightarrow a_3 = 11$$

A nossa sequência é:

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{7}_{S_1},9}_{S_2=16},11}_{S_3=27},\ldots$$

Cada termo, a partir do segundo, é o anterior mais 2.

Opção C

Questão 19

Se X é um conjunto com número finito de elementos, $n(X)$, representa o número de elementos do conjunto X. Considere os conjuntos A, B e C com as seguintes propriedades:

$n(A \cup B \cup C) = 25$

$n(A - C) = 13$

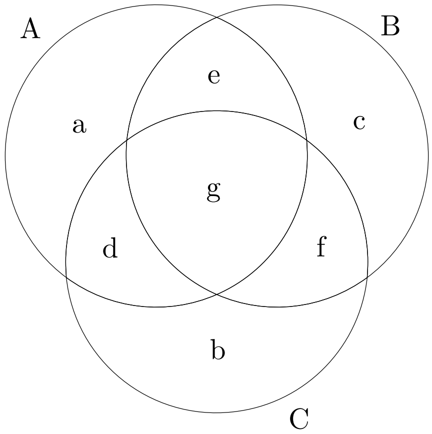
$n(B - A) = 10$

$n(A \cap C) = n(C - (A \cup B))$

O maior valor possível de $n(C)$ é igual a

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Solução:
Fazemos o diagrama de Venn do enunciado:



Dos dados do enunciado:

$$n(A \cup B \cup C) = 25$$
$$n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 25$$
$$a + d + e + g + e + g + c + f + d + g + f + b - e - g - d - g - g - f + g = 25$$
$$a + d + e + g + c + f + b = 25$$

E ainda:

$$n(A - C) = 13 \Rightarrow a + e = 13$$
$$n(B - A) = 10 \Rightarrow c + f = 10$$
$$n(A \cap C) = n(C - (A \cup B)) \Rightarrow d + g = b$$

Então, substituindo na primeira equação:

$$13 + b + 10 + b = 25$$
$$2b = 25 - 23 \Rightarrow b = 1$$

Queremos $n(C)$:

$$n(C) = d + g + f + b$$

Logo

$$n(C) = 2 + f$$
$$a + d + e + g + c + f + b = 25 \Rightarrow n(C) + a + e + c = 25$$

Ou seja

$$n(C) + c = 12$$

O menor valor possível para **c é zero.**

$$n(C) = 12$$

Para que isto ocorra devemos ter $f = 10$, o que está correto, já que $c + f = 10$.

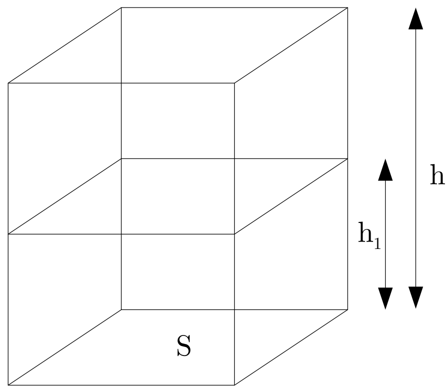
Opção D

Questão 20

Um recipiente tem a forma de um paralelepípedo retângulo com altura h e base quadrada. Ele está com uma certa quantidade de água até uma altura h_1. Duas esferas, ambas com diâmetros iguais a 2 dm, foram colocadas dentro do recipiente, ficando esse recipiente com o nível de água até a borda (altura h). Considerando que o volume do paralelepípedo retângulo é de 40 litros, pode-se afirmar que a razão $\frac{h_1}{h}$, utilizando $\pi = 3$, vale:

Solução:

Veja a figura abaixo:



Seja **S** a área da base do paralelepípedo. Temos que seu volume será:

$$V = S \cdot h \Rightarrow S = \frac{40}{h}$$

As duas esferas colocadas têm o volume total igual ao volume que faltava pra encher o paralelepípedo de água, ou seja,

$$2 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = S \cdot (h - h_1)$$

Então:

$$\frac{8}{3}\pi \cdot 1^3 = \frac{40}{h} \cdot (h - h_1)$$

$$\frac{32\pi}{40 \cdot 3} = \frac{(h - h_1)}{h}$$

$$\frac{4\pi}{15} = \frac{(h - h_1)}{h}$$

Do enunciado, $\pi = 3$:

$$\frac{4 \cdot 3}{15} = \frac{(h - h_1)}{h} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{(h - h_1)}{h}$$

$$4h = 5h - 5h_1$$

$$-h = -5h_1$$

$$\frac{h_1}{h} = \frac{1}{5}$$

Opção D