Soluções de Questões de Vestibular – UFF

16 de dezembro

2010

Este arquivo contém soluções comentadas das questões de matemática das provas da Universidade Federal Fluminense - UFF

Universidade Federal Fluminense - UFF

Soluções das Questões de Matemática da Universidade Federal Fluminense – UFF

Vestibular 2010/2011 – Primeira Fase

Questão 22

Como mostram vários censos, nossa civilização habita o globo terrestre de maneira muito desigual. A densidade demográfica de uma região é a razão entre o número de seus habitantes e a sua área. Através desse índice, é possível estudar a ocupação de um território por uma determinada população.

Com relação à densidade demográfica, assinale a afirmativa **incorreta**.

(A) Se o número de habitantes de uma região dobra e sua área permanece a mesma, então a densidade demográfica dessa região também dobra.

(B) Se duas regiões possuem o mesmo número de habitantes, então a região com maior área possui uma densidade demográfica maior.

(C) Se duas regiões possuem a mesma área, então a região com maior número de habitantes possui uma densidade demográfica maior.

(D) Se duas regiões possuem a mesma área e o mesmo número de habitantes, então elas possuem a mesma densidade demográfica.

(E) Se uma região tem 150 000 000 de habitantes e área igual a 7 500 000 km^2, então sua densidade demográfica é igual a 20 habitantes/km^2.

Solução:

A densidade demográfica **d** pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$d = \frac{p}{A}$$

Onde **p** é o número de habitantes e **A** é a área considerada. Vamos analisar as opções:

(A) **Verdadeira.** Seja **d'** a nova densidade, veja:

$$d' = \frac{2p}{A} \Rightarrow d' = 2d$$

(B) **Falsa.** Seja **A'** a outra área e $A' > A$. Então:

$$d = \frac{p}{A} \text{ e } d' = \frac{p}{A'}$$

Comparando:

$$dA = d'A' \Rightarrow d' = d \cdot \frac{A}{A'}$$

Como $A' > A \Rightarrow \frac{A}{A'} < 1 \Rightarrow d' < d$.

(C) **Verdadeira.** Seja **p'** a outra população e $p' > p$. Então:

$$d = \frac{p}{A} \text{ e } d' = \frac{p'}{A}$$

Comparando:

$$\frac{p}{d}=\frac{p'}{d'}\Rightarrow d'=d\cdot\frac{p'}{p}$$

Como $p'>p\Rightarrow\frac{p'}{p}>1\Rightarrow d'>d$.

(D) **Verdadeira.** Temos que:

$$d=\frac{p}{A}\ \text{e}\ d'=\frac{p'}{A'}$$

Como $p=p'$ e $A=A'$ temos que $d=d'$.

(E) **Verdadeira.** Fazendo as contas:

$$d=\frac{150.000.000}{7.500.000}\Rightarrow d=20\ \text{habitantes}/\text{km}^2$$

Opção B

Questão 28

Figura 1: Fragmento do papiro de Rhind

Ao se fazer um exame histórico da presença africana no desenvolvimento do pensamento matemático, os indícios e os vestígios nos remetem à matemática egípcia, sendo o papiro de Rhind um dos documentos que resgatam essa história.

Nesse papiro encontramos o seguinte problema:

"Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores."

Coube ao homem que recebeu a parte maior da divisão acima a quantidade de

(A) $\frac{115}{3}$ pães (B) $\frac{55}{6}$ pães (C) 20 pães (D) $\frac{65}{6}$ pães (E) 35 pães

Solução:

Uma P.A. de 5 termos pode ser representada como sendo:

$$(x-2r,x-r,x,x+r,x+2r)$$

Somando os termos:

$$5x=100\Rightarrow x=20$$

Do enunciado:

$$\frac{(20+20+r+20+2r)}{7}=20-r+20-2r$$

$$\frac{60+3r}{7}=40-3r$$

$$60+3r=280-21r$$

$$24r=220\Rightarrow r=\frac{55}{6}$$

O homem que recebeu mais:

$$x + 2r = 20 + 2 \cdot \frac{55}{6} = 20 + \frac{55}{3} = \frac{115}{3}$$

Opção A

Questão 31

Para ser aprovada pela FIFA, uma bola de futebol deve passar por vários testes. Um deles visa garantir a esfericidade da bola: o seu "diâmetro" é medido em dezesseis pontos diferentes e, então, a média aritmética desses valores é calculada. Para passar nesse teste, a variação de cada uma das dezesseis medidas do "diâmetro" da bola com relação à média deve ser no máximo 1,5%. Nesse teste, as variações medidas na Jabulani, bola oficial da Copa do Mundo de 2010, não ultrapassaram 1%.

Se o diâmetro de uma bola tem aumento de **1%**, então o seu volume aumenta **x%**.

Dessa forma, é correto afirmar que

(A) $x \in [5,6)$ (B) $x \in [2,3)$ (C) $x = 1$ (D) $x \in [3,4)$ (E) $x \in [4,5)$

Solução:

O volume de uma esfera pode ser calculada através da expressão:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ ou } V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3$$

Se o diâmetro aumentar 1%:

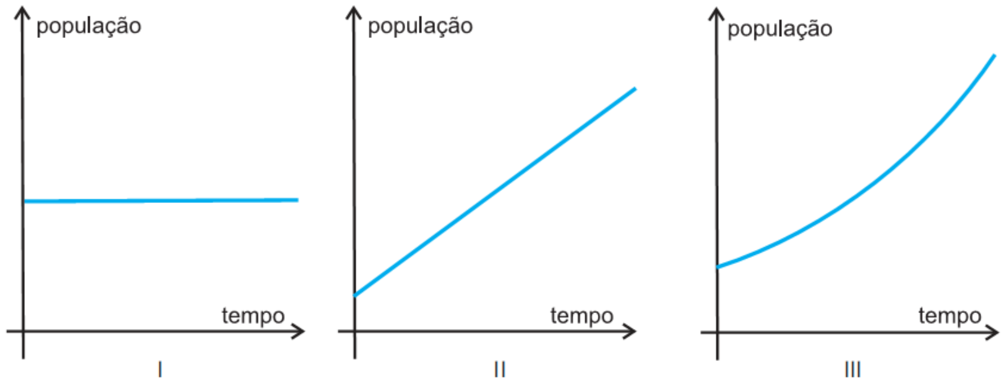
$$V' = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{1{,}01 \cdot d}{2}\right)^3 \Rightarrow V' = 1{,}030301 \cdot \underbrace{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3}_{V}$$

Ou seja, o aumento é de 3,0301%.

Opção D

Questão 36

Os gráficos I, II e III, abaixo, esboçados em uma mesma escala, ilustram modelos teóricos que descrevem a população de três espécies de pássaros ao longo do tempo.



Sabe-se que a população da espécie A aumenta 20% ao ano, que a população da espécie B aumenta 100 pássaros ao ano e que a população da espécie C permanece estável ao longo dos anos.

Assim, a evolução das populações das espécies A, B e C, ao longo do tempo, correspondem, respectivamente, aos gráficos

(A) I, III e II

(B) II, I e III

(C) II, III e I

(D) III, I e II
(E) III, II e I

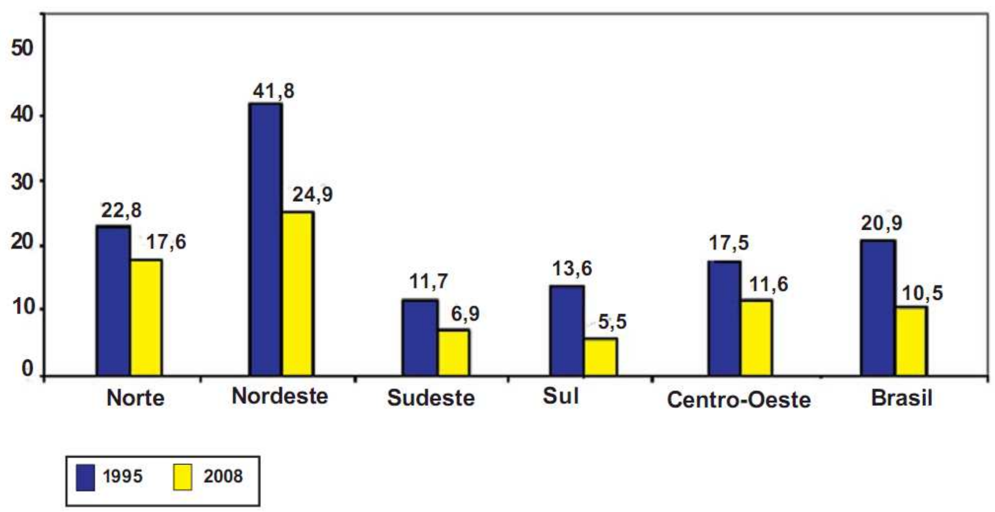
Solução:
A população A aumenta 20% a cada ano o que é representado por uma **função exponencial** – Gráfico III.
A população B aumenta 100 unidades a cada ano o que é representado por uma **função linear** – Gráfico II.
A população C não aumenta, o que é representado por uma **função constante** – Gráfico I.

Opção E

Questão 46

Diz-se que uma família vive na pobreza extrema se sua renda mensal por pessoa é de, no máximo, 25% do salário mínimo nacional. Segundo levantamento do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (Ipea), mais de treze milhões de brasileiros saíram da pobreza extrema entre 1995 e 2008. No entanto, a diminuição generalizada nas taxas de pobreza extrema nesse período não ocorreu de forma uniforme entre as grandes regiões geográficas do país, conforme ilustra o gráfico abaixo.

TAXAS DE POBREZA EXTREMA NO BRASIL E NAS SUAS GRANDES REGIÕES EM 1995 E 2008 (EM %)



Adaptado de IBGE – PNAD – Ipea.

Tendo em vista o gráfico, verifica-se que a taxa nacional de pobreza extrema caiu 49,8%, passando de 20,9% para 10,5%. Pode-se concluir, então, que a região em que a taxa de pobreza extrema (em %) caiu mais de 50% foi
(A) a região Norte
(B) a região Sudeste
(C) a região Nordeste
(D) a região Centro-Oeste
(E) a região Sul

Solução:
Vamos analisar região por região:
Região Norte:

$$\frac{22,8-17,6}{22,8}=\frac{5,2}{22,8}=0,228=22,8\%$$

Região Sudeste:

$$\frac{11,7-6,9}{11,7}=\frac{4,8}{11,7}=0,41=41\%$$

Região Nordeste:

$$\frac{41,8-24,9}{41,8}=\frac{16,9}{41,8}=0,404=40,4\%$$

Região Centro-Oeste:

$$\frac{17,5-11,6}{17,5}=\frac{5,9}{17,5}=0,337=33,7\%$$

Região Sul:

$$\frac{13,6-5,5}{13,6}=\frac{8,1}{13,6}=0,5955=59,55\%$$

Opção E

Questão 47

O índice de Theil, um indicador usado para medir desigualdades econômicas de uma população, é definido por

$$T=\ln\left(\frac{M_A}{M_G}\right)$$

sendo

$$M_A=\sum_{i=1}^{N}x_i=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_N}{N} \text{ e } M_G=\sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N}x_i}=\sqrt[N]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_N},$$

respectivamente, as médias aritmética e geométrica das rendas x_1, x_2, ..., x_N (consideradas todas positivas e medidas com uma mesma unidade monetária) de cada um dos N indivíduos da população.

Com base nessas informações, assinale a afirmativa incorreta.

(A) $T=\ln(M_A)-\ln(M_G)$

(B) $\ln\left(\frac{M_A}{x_i}\right)\geq 0$ para todo $x_i>0, i=1,2,\ldots,N$.

(C) $\frac{x_i}{N}\leq M_A$ para todo $i=1,\ldots,N$.

(D) $x_1=x_2=\ldots=x_N$ então $T=0$.

(E) $T=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left(\frac{M_A}{x_i}\right)=\frac{1}{N}\left(\ln\left(\frac{M_A}{x_1}\right)+\ln\left(\frac{M_A}{x_2}\right)+\ldots+\ln\left(\frac{M_A}{x_N}\right)\right)$.

Solução:

Vamos analisar cada item:

(A) **Verdadeira.** Note que $M_A, M_G>0$, logo vale a propriedade:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right)=\log a-\log b$$

(B) **Falsa.** Vamos analisar a expressão:

$$\ln\left(\frac{M_A}{x_i}\right)\geq 0\Rightarrow\frac{M_A}{x_i}\geq e^0\Rightarrow\frac{M_A}{x_i}\geq 1$$

Esta igualdade nos diz que a média é maior que todo x_i, o que seria impossível, pois a média sempre está entre o menor e o maior valor.

(C) **Verdadeira.** Basta fazer:

$$\frac{x_i}{N} \le M_A \Rightarrow \frac{x_i}{N} \le \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \Rightarrow x_i \le \sum_{i=1}^{N} x_i$$

(D) **Verdadeira.** Se $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$ teremos:

$$M_A = \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} \Rightarrow M_A = \frac{N \cdot x_N}{N} \Rightarrow M_A = x_N$$

$$M_G = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i} = \sqrt[N]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_N} \Rightarrow M_G = \sqrt[N]{(x_N)^N} \Rightarrow M_G = x_N$$

Portanto:

$$\frac{M_A}{M_G} = \frac{x_N}{x_N} = 1$$

E, consequentemente:

$$T = \ln 1 \Rightarrow T = 0$$

(E) **Verdadeira.** Basta expandir o somatório.

Opção B

Questão 54

A transmissão de mensagens codificadas em tempos de conflitos militares é crucial. Um dos métodos de criptografia mais antigos consiste em permutar os símbolos das mensagens. Se os símbolos são números, uma permutação pode ser efetuada usando-se multiplicações por matrizes de permutação, que são matrizes quadradas que satisfazem as seguintes condições:

- cada coluna possui um único elemento igual a 1 (um) e todos os demais elementos são iguais a zero;
- cada linha possui um único elemento igual a 1 (um) e todos os demais elementos são iguais a zero.

Por exemplo, a matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ permuta os elementos da matriz coluna $Q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, transformando-a na matriz $P = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$, pois $P = M \cdot Q$.

Pode-se afirmar que a matriz que permuta $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, transformando-a em $\begin{bmatrix} c \\ a \\ b \end{bmatrix}$, é

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solução:

Repare que, no exemplo dado, o valor **1** aparece na primeira linha e na segunda coluna da matriz M para que o valor **b** apareça na matriz resultado P. Da mesma forma, na segunda linha da matriz M somente é **1** o valor da terceira coluna, fazendo com que o valor **c** apareça. Seguindo este algoritmo a matriz que procuramos é:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Prova real:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c \\ 0 \cdot a + 1 \cdot b + 0 \cdot c \end{bmatrix}$$

Opção A

Questão 56

Muitos consideram a Internet como um novo continente que transpassa fronteiras geográficas e conecta computadores dos diversos países do globo. Atualmente, para que as informações migrem de um computador para outro, um sistema de endereçamento denominado IPv4 (Internet Protocol Version 4) é usado. Nesse sistema, cada endereço é constituído por quatro campos, separados por pontos. Cada campo, por sua vez, é um número inteiro no intervalo $\left[0, 2^8 - 1\right]$. Por exemplo, o endereço IPv4 do servidor WEB da UFF é 200.20.0.21. Um novo sistema está sendo proposto: o IPv6.

Nessa nova versão, cada endereço é constituído por oito campos e cada campo é um número inteiro no intervalo $\left[0, 2^{16} - 1\right]$.

Com base nessas informações, é correto afirmar que

(A) o número de endereços diferentes no sistema IPv6 é o quádruplo do número de endereços diferentes do sistema IPv4

(B) existem exatamente $4 \cdot \left(2^8 - 1\right)$ endereços diferentes no sistema IPv4

(C) existem exatamente 2^{32} endereços diferentes no sistema IPv4

(D) o número de endereços diferentes no sistema IPv6 é o dobro do número de endereços diferentes do sistema IPv4

(E) existem exatamente $\left(2^8 - 1\right)^4$ endereços diferentes no sistema IPv4

Solução:

Há 256 possibilidades para cada campo. Vamos então analisar cada opção:

(A) **Falsa.** O número de endereços distintos no sistema IPv6 é:

$$256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256 = 2^{8+8+8+8+8+8} = 2^{48} \text{ endereços}$$

(B) **Falsa.** O número de endereços distintos no sistema Ipv4 é:

$$256 \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256 = 2^{8+8+8+8} = 2^{32} \text{ endereços}$$

(C) **Verdadeira.**

(D) **Falsa.** Comparando o total de endereços: $\frac{2^{48}}{2^{32}} = 2^{16}$.

(E) **Falsa.** Vide item B.

Opção C