CURSO MENTOR

Soluções Comentadas Matemática

UERJ – Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Versão 14.3

19/06/2011

Este material contém soluções comentadas das questões de matemática dos vestibulares de admissão aos cursos de graduação da Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ.

Soluções das Questões de Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Vestibular 2011/2012

1º Exame de Qualificação

Questão 24

A meia-vida é o parâmetro que indica o tempo necessário para que a massa de uma certa quantidade de radioisótopos se reduza à metade de seu valor. Considere uma amostra de ${}_{53}I^{133}$, produzido no acidente nuclear, com massa igual a 2 g e meia-vida de 20 h.
Após 100 horas, a massa dessa amostra, em miligramas, será cerca de:

(A) 62,5 (B) 125 (C) 250 (D) 500

Solução:
De maneira bem simples podemos esquematizar a solução da seguinte maneira:

Quantidade inicial →	2 g	1 g	← Após 20h
Quantidade inicial →	1 g	0,5 g	← Após 40h
Quantidade inicial →	500 mg	250 mg	← Após 60h
Quantidade inicial →	250 mg	125 mg	← Após 80h
Quantidade inicial →	125 mg	62,5 mg	← Após 100h

Opção A

Questão 27

Um soldado fez n séries de flexões de braço, cada uma delas com 20 repetições. No entanto, como consequência das alterações da contração muscular devidas ao acúmulo de ácido lático, o tempo de duração de cada série, a partir da segunda, foi sempre 28% maior do que o tempo gasto para fazer a série imediatamente anterior. A primeira série foi realizada em 25 segundos e a última em 1 minuto e 40 segundos.
Considerando $\log 2 = 0,3$, a soma do número de repetições realizadas nas n séries é igual a:

(A) 100 (B) 120 (C) 140 (D) 160

Solução:
De acordo com enunciado temos a seguinte situação:

Série inicial →	25 s	$1,28\cdot 25\text{ s}$	← Série seguinte
Série inicial →	$1,28\cdot 25\text{ s}$	$1,28^2\cdot 25\text{ s}$	← Série seguinte
Série inicial →	$1,28^2\cdot 25\text{ s}$	$1,28^3\cdot 25$	← Série seguinte
	$\vdots$	$\vdots$	
Série inicial →	$1,28^{n-1}\cdot 25\text{ s}$	$1,28^n\cdot 25\text{ s}$	← Série seguinte

Como sabemos que a útima série durou 1 minuto e 40 segundos (que equivale a 100 segundos) teremos:

$$1,28^n \cdot 25 = 100$$

Daí:

$$1,28^n = \frac{100}{25} \Rightarrow 1,28^n = 4$$

$$\left(\frac{128}{100}\right)^n = 2^2$$

Apicando logaritmos de ambos os lados:

$$\log\left[\left(\frac{128}{100}\right)^n\right] = \log 2^2$$

Então:

$$n \cdot \log\frac{128}{100} = 2\log 2 \Rightarrow n \cdot (\log 128 - \log 100) = 2\log 2$$

$$n \cdot \left(\log 2^7 - \log 10^2\right) = 2\log 2$$

$$n \cdot (7\log 2 - 2\log 10) = 2\log 2$$

$$n \cdot (7\log 2 - 2) = 2\log 2 \Rightarrow n \cdot (7 \cdot 0,3 - 2) = 2 \cdot 0,3$$

$$n = \frac{2 \cdot 0,3}{7 \cdot 0,3 - 2} \Rightarrow n = \frac{0,6}{2,1-2} \Rightarrow n = \frac{0,6}{0,1} \Rightarrow n = 6$$

Lembrando que $n = 0$ é a primeira série e, como cada repetição tem 20 flexões, teremos um total de 140.

Opção C

Questão 31

Uma família comprou água mineral em embalagens de 20 L, de 10 L e de 2 L. Ao todo, foram comprados 94 L de água, com o custo total de R$ 65,00.
Veja na tabela os preços da água por embalagem:

Volume da Embalagem (L)	Preço (R$)
20	10,00
10	6,00
2	3,00

Nessa compra, o número de embalagens de 10 L corresponde ao dobro do número de embalagens de 20 L, e a quantidade de embalagens de 2 L corresponde a n.
O valor de n é um divisor de:

(A) 32 (B) 65 (C) 77 (D) 81

Solução:

Seja x o número de embalagens de 20 L; y, o de 10 L e z, o de 2 L.
Teremos então a seguinte equação para o total gasto:

$$10x + 6y + 3z = 65$$

Teremos então a seguinte equação para o total de litros:

$$20x + 10y + 2z = 94$$

Sabemos, do enunciado, que:

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = n \end{cases}$$

Então:

$$\begin{cases} 10x + 6 \cdot 2x + 3n = 65 \\ 20x + 10 \cdot 2x + 2n = 94 \end{cases}$$

Daí:

$$\begin{cases} 22x + 3n = 65 \\ 40x + 2n = 94 \end{cases}$$

Simplificando a segunda equação:

$$20x + n = 47 \Rightarrow n = 47 - 20x$$

Substituindo na primeira equação:

$$22x + 3(47 - 20x) = 65$$
$$22x + 141 - 60x = 65$$
$$-38x = -76$$
$$x = 2$$

Voltando ao sistema:

$$n = 47 - 20x \Rightarrow n = 47 - 20 \cdot 2 \Rightarrow n = 7$$

77 é múltiplo de 7.

Opção C

Questão 34

Um cliente, ao chegar a uma agência bancária, retirou a última senha de atendimento do dia, com o número 49. Verificou que havia 12 pessoas à sua frente na fila, cujas senhas representavam uma progressão aritmética de números naturais consecutivos, começando em 37.
Algum tempo depois, mais de 4 pessoas desistiram do atendimento e saíram do banco. Com isso, os números das senhas daquelas que permaneceram na fila passaram a formar uma nova progressão aritmética.
Se os clientes com as senhas de números 37 e 49 não saíram do banco, o número máximo de pessoas que pode ter permanecido na fila é:

(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 12

Solução:
Quando o cliente chegou à agência havia 12 pessoas, então havia, no total, 13 pessoas que constituíam uma P.A. de 13 termos começando em 37 e terminando em 49, ou seja:

$$(37, \ldots, 49)$$

Vamos calcular a razão:

$$a_{13} = a_1 + 12r$$
$$49 = 37 + 12r$$
$$12r = 12 \Rightarrow r = 1$$

Todas as senhas contêm números inteiros.
Com a saída de mais de 4 pessoas, passamos a ter uma nova P.A. Mas não sabemos quantas saíram, então:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$49 = 37 + (n-1)r$$

Isolando r teremos:

$$49 = 37 + (n-1)r \Rightarrow (n-1)r = 12 \Rightarrow r = \frac{12}{n-1}$$

Sabemos que $2 \leq n \leq 8$, pois saíram mais de 4 pessoas e r é inteiro, pois todas as senhas são números inteiros. Testando os valores de n de modo que r seja o menor possível, (pois r pequano garante mais pessoas na fila):

$$n = 8 \Rightarrow r = \frac{12}{8-1} \Rightarrow r = \frac{12}{7} \rightarrow \text{Não serve}$$

$$n = 7 \Rightarrow r = \frac{12}{7-1} \Rightarrow r = \frac{12}{6} \Rightarrow \boxed{r = 2} \rightarrow \text{Permanecem: 37 39 41 43 45 47 49}$$

$$n = 6 \Rightarrow r = \frac{12}{6-1} \Rightarrow r = \frac{12}{5} \rightarrow \text{Não serve}$$

$$n = 5 \Rightarrow r = \frac{12}{5-1} \Rightarrow r = \frac{12}{4} \Rightarrow \boxed{r = 3} \rightarrow \text{Permanecem: 37 40 43 46 49}$$

$$n = 4 \Rightarrow r = \frac{12}{4-1} \Rightarrow r = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{r = 4} \rightarrow \text{Permanecem: 37 41 45 49}$$

$$n = 3 \Rightarrow r = \frac{12}{3-1} \Rightarrow r = \frac{12}{2} \Rightarrow \boxed{r = 6} \rightarrow \text{Permanecem: 37 43 49}$$

$$n = 2 \Rightarrow r = \frac{12}{2-1} \Rightarrow r = \frac{12}{1} \Rightarrow \boxed{r = 12} \rightarrow \text{Permanecem: 37 49}$$

Opção B

Questão 42

Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, **I**, **II** e **III**, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante.
Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1000 usuários desses produtos. Observe a matriz A, na qual cada elemento aij representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo i para o modelo j.

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 150 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Escolhendo-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele não pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a:

(A) 20% (B) 35% (C) 40% (D) 65%

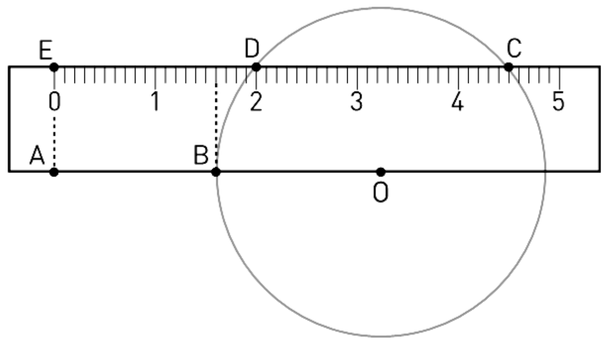
Solução:
Como a troca de ar-condicionado é de i para j os elementos que estão na diagonal principal, não trocarão de aparelho, pois neste caso temos $i = j$.
Então há 350 usuários que não trocarão seus aparelhos, daí:

$$P = \frac{350}{1000} \Rightarrow P = 0,35 = 35\%$$

Opção B

Questão 43

A figura abaixo representa um círculo de centro O e uma régua retangular, graduada em milímetros. Os pontos A, E e O pertencem à régua e os pontos B, C e D pertencem, simultaneamente, à régua e à circunferência.



Considere os seguintes dados:

Segmentos	Medida (cm)
$\overline{AB}$	1,6
$\overline{ED}$	2,0
$\overline{EC}$	4,5

O diâmetro do círculo é, em centímetros, igual a:

(A) 3,1 (B) 3,3 (C) 3,5 (D) 3,6

Solução:

Ligando $\overline{OD}$ e $\overline{OC}$ temos um triângulo isósceles, pois $\overline{OD} \cong \overline{OC}$ são raios da circunferência. Trançando a perpendicular de O até $\overline{CD}$ no ponto M teremos:

$$\overline{DC} = \overline{EC} - \overline{ED}$$

$$\overline{DC} = 4,5 - 2,0 \Rightarrow \overline{DC} = 2,5$$

M é ponto médio, logo:

$$\overline{DM} = \frac{\overline{DC}}{2} \Rightarrow \overline{DM} = 1,25$$

Tomando na régua o segmento $\overline{BM}$ teremos:

$$\overline{BM} = \overline{BD} + \overline{DM}$$

$$\overline{BM} = \underbrace{\overline{ED} - \overline{AB}}_{\overline{BD}} + \overline{DM}$$

$$\overline{BM} = 2 - 1,6 + 1,25 \Rightarrow \overline{BM} = 1,65$$

Mas $\overline{BM} \cong \overline{BO}$ então o dimâmetro será:

$$2\overline{BM} = 2 \cdot 1,65 \Rightarrow 2\overline{BM} = 3,3$$

Opção B

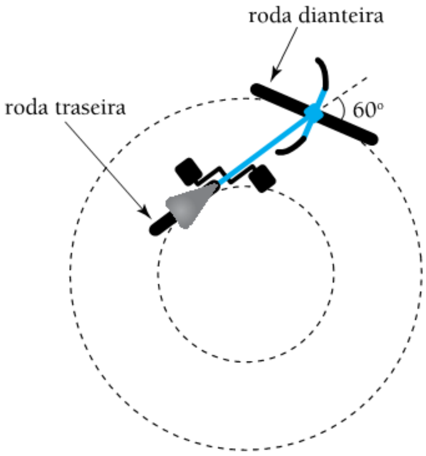
Vestibular 2010/2011

2º Exame de Qualificação 2010/2011

Questão 30

Um ciclista pedala uma bicicleta em trajetória circular de modo que as direções dos deslocamentos das rodas mantêm sempre um ângulo de 60°. O diâmetro da roda traseira dessa bicicleta é igual à metade do diâmetro de sua roda dianteira.

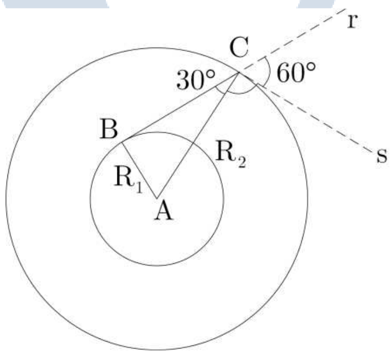
O esquema a seguir mostra a bicicleta vista de cima em um dado instante do percurso.



Admita que, para uma volta completa da bicicleta, N_1 é o número de voltas dadas pela roda traseira e N_2 o número de voltas dadas pela roda dianteira em torno de seus respectivos eixos de rotação. A razão $\frac{N_1}{N_2}$ é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Solução:
Seja R_1 o raio da circunferência menor e R_2, o da circunferência maior. Fazendo uma figura teremos:



O triângulo ABC é retângulo em B, que é o ponto de tangência da reta r com a circunferência menor. Então:

$$\text{sen } 30° = \frac{R_1}{R_2}$$

Logo:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

Seja então r_1 o raio da roda menor e r_2 o raio da maior. Do enunciado temos que:

$$2(2r_1) = 2r_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$$

Então:

$$2\pi R_1 = N_1 \cdot 2\pi r_1$$
$$2\pi R_2 = N_2 \cdot 2\pi r_2$$

Dividindo uma equação pela outra:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 1$$

Opção A

Utilize as informações a seguir para responder às questões de números 32 e 33.

Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Observe a ilustração:

Questão 32

Para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor, o menor número de moedas a serem inseridas na máquina corresponde a:

(A) 5 (B) 13 (C) 31 (D) 40

Solução:

Vamos chamar as 10 cores de A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Supondo que a cada moeda saia uma cor diferente teremos:

ABCDEFGHIJABCDEFGHIJABCDEFGHIJ

Repare que este é o pior caso possível, mas **garante** que ao inserir uma nova moeda sairá uma cor que terá se repetido **4** vezes. Ou seja, na 31ª moeda, obrigatoriamente teremos uma 4ª repetição de cor.

Opção C

Questão 33

Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas, é aproximadamente de:

(A) 0,008 (B) 0,025 (C) 0,040 (D) 0,072

Solução:

Devemos ter entre 3 bolas retiradas duas de cor branca. Como a retirada de cada bola é equiprovável e os eventos são independentes teremos:

Probabilidade de sair uma bola branca:

$$P_{B1} = \frac{10}{100}$$

Probabilidade de sair uma segunda bola branca:

$$P_{B2} = \frac{9}{99}$$

Probabilidade de sair uma bola diferente da cor branca:

$$P = \frac{90}{98}$$

Deve-se lembrar que há **3 possibilidades** para a saída de duas bolas brancas:

$$BBX, BXB, XBB$$

Onde **X** representa uma cor qualquer, então:

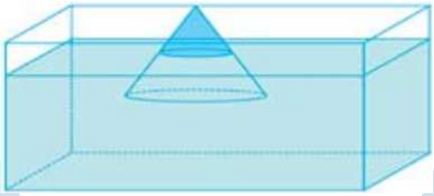
$$P_{Total} = 3 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98}$$

$$P_{Total} = 3 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{98} \Rightarrow P_{Total} = \frac{27}{1078} \Rightarrow P_{Total} = 0{,}025$$

Opção B

Questão 35

Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.

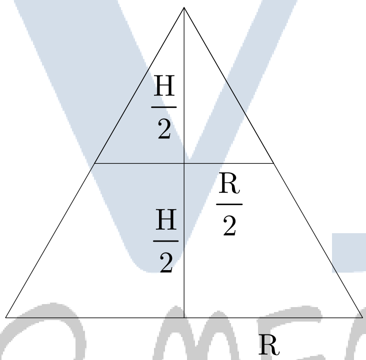


Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{8}$

Solução:

Vamos fazer uma seção transversal do cilindro passando pelo seu vértice e pelo centro da base:



Calculando o volume superior (v):

$$v = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2}}{3}$$

Calculando o volume total (V):

$$V = \frac{\pi(R)^2 \cdot H}{3}$$

O volume submerso (V_s) então será:

$$V - v = \frac{\pi(R)^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2}}{3}$$

$$V - v = \frac{\pi R^2 H - \pi\frac{R^2 H}{8}}{3} \Rightarrow V - v = \frac{\pi R^2 H}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

$$V_S = \frac{7\pi R^2 H}{24}$$

Fazendo $\frac{V_S}{V}$ temos:

$$\frac{V_S}{V} = \frac{\frac{7\pi R^2 H}{24}}{\frac{\pi R^2 H}{3}} \Rightarrow \frac{V_S}{V} = \frac{7\pi R^2 H}{24} \cdot \frac{3}{\pi R^2 H}$$

$$\frac{V_S}{V} = \frac{7}{8}$$

Opção D

Questão 36

Questão 37

Essas duas questões tratam de assuntos que envolvem mais física do que matemática. Colocamos então sua solução em nosso material de **física** no site http://www.cursomentor.com

Questão 38

A definição apresentada pelo personagem não está correta, pois, de fato, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao se multiplicar o valor de uma delas por um número positivo, o valor da outra é dividido por esse mesmo número.
Admita que a nota em matemática e a altura do personagem da tirinha sejam duas grandezas, x e y, inversamente proporcionais.
A relação entre x e y pode ser representada por:

(A) $y = \frac{3}{x^2}$ (B) $y = \frac{5}{x}$ (C) $y = \frac{2}{x+1}$ (D) $y = \frac{2x+4}{3}$

Solução:
Seja a regra de três inversa abaixo, em que x e y são inversamente proporcionais:

$$x \text{ — } y$$
$$a \text{ — } b$$

Teremos então:

$$xy = ab$$

O que nos dá:

$$y = \frac{ab}{x}$$

Fazendo $ab = 5$ teremos:

$$y = \frac{5}{x}$$

Opção B

Observação: A opção C poderia nos confundir, mas ela supõe que y e $x+1$ são inversamente proporcionais. Fazendo $x+1=k$ teremos a mesma forma anterior. Além disso, basta um exemplo para provar o que estamos falando:

Seja o par $(1,1)$ que pertence a curva $y = \frac{2}{x+1}$, fazendo $x=2$ deveríamos ter $y = \frac{1}{2}$, no entanto:

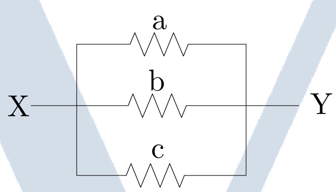
$$y = \frac{2}{3}$$

O que comprova o que foi dito anteriormente.

1º Exame de Qualificação 2010/2011

Questão 26

Observe a representação do trecho de um circuito elétrico entre os pontos X e Y, contendo três resistores cujas resistências medem, em ohms, a, b e c.



Admita que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e que a resistência equivalente entre X e Y mede 2,0 Ω. O valor, em ohms, de $(a+b+c)$ é igual a:

(A) 21,0 (B) 22,5 (C) 24,0 (D) 24,5

Solução:
A resistência equivalente entre os pontos X e Y é dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Rearrumando os termos teremos:

$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{1}{2}$$

Reescrevendo os valores em função de uma PG de três termos de razão $\frac{1}{2}$ temos:

$$PG\left(a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}\right)$$

Então:

$$\frac{a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) + a \cdot \left(\frac{a}{4}\right) + \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{4}\right)}{a \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \cdot \left(\frac{a}{4}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)}{a^3 \cdot \frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{16}} \Rightarrow a = \frac{7}{8} \cdot \frac{16}{1} \Rightarrow a = 14$$

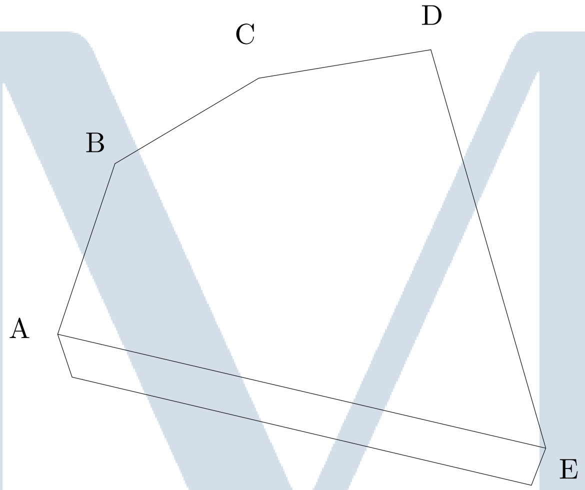
A PG então fica $\left(14, 7, \frac{7}{2}\right)$, somando seus termos temos:

$$\frac{7}{2} + 7 + 14 = 21 + 3,5 = 24,5$$

Opção D

Questão 33

A embalagem de papelão de um determinado chocolate, representada na figura abaixo, tem a forma de um prisma pentagonal reto de altura igual a 5 cm.



Em relação ao prisma, considere:

— cada um dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ da base superior mede 120°;

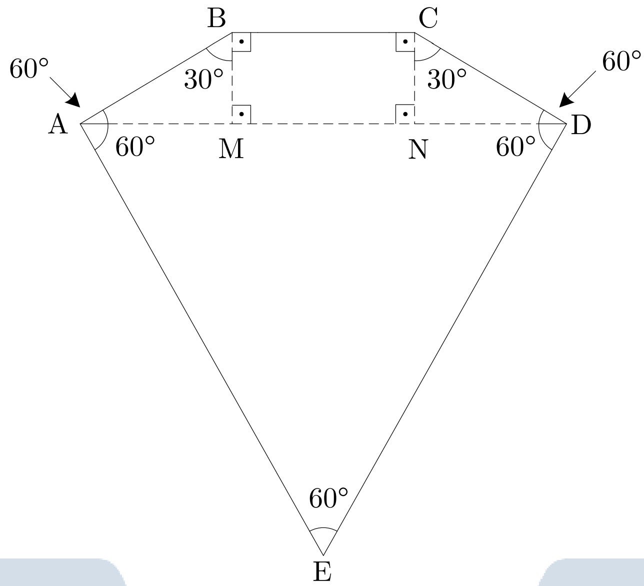
— as arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, e $\overline{CD}$ medem 10 cm cada.

Considere, ainda, que o papelão do qual é feita a embalagem custa R$ 10,00 por m^2 e que $\sqrt{3} = 1,73$. Na confecção de uma dessas embalagens, o valor, em reais, gasto somente com o papelão é aproximadamente igual a:

(A) 0,50 (B) 0,95 (C) 1,50 (D) 1,85

Solução:

As partes superior e inferior da caixa do chocolate podem ser vistas como abaixo:



Como sabemos, a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por:

$$S_i = 180°(n-2)$$

Portanto, o ângulo $\hat{E}$ é dado por:

$$S_i = 180°(5-2) \Rightarrow 120 \cdot 4 + \hat{E} = 540° \Rightarrow \hat{E} = 540° - 480°$$

$$\hat{E} = 60°$$

Como $\hat{A} = \hat{D} = 120°$ temos que a figura é simétrica. Traçamos o segmento $\overline{AD}$, $\overline{AE} = \overline{DE}$ e o triângulo ΔADE é equilátero, portanto $D\hat{A}E = A\hat{D}E = 60°$. Além disso, também como consequência, $B\hat{A}M = C\hat{D}N = 60°$.

Agora, traçando os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ ambos perpendiculares a $\overline{BC}$ teremos $A\hat{B}M = D\hat{C}N = 30°$ e os triângulos retângulos congruentes $\Delta ABM \equiv \Delta CDN$.

A área da figura será a soma das áreas do trapézio isósceles ABCD e do triângulo ΔADE.

Cálculo da área do trapézio ABCD:

$$S_{ABCD} = \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\right)\overline{BM}$$

Precisamos calcular $\overline{BM}$ e $\overline{AD}$. Cálculo de $\overline{BM}$:

$$\cos 30° = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BM}}{10} \Rightarrow \overline{BM} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Cálculo de $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND}$$

$$\cos 60° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AM}}{10} \Rightarrow \overline{AM} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = 5 + 10 + 5 \Rightarrow \overline{AD} = 20 \text{ cm}$$

Voltando ao cálculo da área:

$$S_{ABCD} = \left(\frac{10+20}{2}\right) \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Calculando a área do triângulo equilátero teremos:

$$S_{\Delta ADE} = \frac{\left(\overline{AD}\right)^2\sqrt{3}}{4}$$

Assim:

$$S_{\Delta ADE} = \frac{(20)^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\Delta ADE} = \frac{(400)\sqrt{3}}{4}$$
$$S_{\Delta ADE} = 100\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Lembrando que são duas faces pentagonais (inferior e superior) e somando as duas áreas calculadas anteriormente:

$$S_{Total} = 2(S_{\Delta ADE} + S_{ABCD}) \Rightarrow S_{Total} = 2\left(100\sqrt{3} + 75\sqrt{3}\right)$$
$$S_{Total} = 350\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Além disso, precisamos considerar as laterais da caixa que são formadas por retângulos de base igual às respectivas arestas das faces superior e inferior e altura 5 cm. Assim, chamando os vértices da base inferior de A', B', C', D' e E'. Teremos a soma:

$$S_{Lateral} = S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} + S_{CC'D'D} + S_{DD'E'E} + S_{EE'A'A}$$

Note que algumas áreas são iguais, o que reduz nosso cálculo e nos dá:

$$S_{Lateral} = 3 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot (20) \cdot 5 \Rightarrow S_{Lateral} = 350\ \text{cm}^2$$

Finalmente, somando a área das faces superior e inferior com a área lateral temos:

$$S = 350 + 350\sqrt{3} \Rightarrow S = 350\left(1+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

O custo de confecção da caixa é de R\$ 10,00 por m^2. Logo será de R\$ 10,00 para cada 10.000 cm^2.
Fazendo uma regra de três simples e direta:

$$\frac{10}{x} = \frac{10000}{350\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

$$x = \frac{350\left(1+\sqrt{3}\right)}{1000} \Rightarrow x \cong 0,95$$

Portanto o custo de confecção da caixa é aproximadamente R\$ 0,95.

Opção B

Questão 34

Uma fábrica produz sucos com os seguintes sabores: uva, pêssego e laranja. Considere uma caixa com 12 garrafas desses sucos, sendo 4 garrafas de cada sabor. Retirando-se, ao acaso, 2 garrafas dessa caixa, a probabilidade de que ambas contenham suco com o mesmo sabor equivale a:

(A) 9,1% (B) 18,2% (C) 27,3% (D) 36,4%

Solução 1:

Como os eventos são independentes podemos fazer:

$$P = 3 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \Rightarrow P = \frac{3}{11} \Rightarrow P \cong 0,2727$$
$$P \cong 27,3\%$$

Solução 2:
O número de possibilidades de retirada de 2 garrafas de suco quaisquer pode ser calculado como:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{10!2!}$$

$$C_{12,2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!2!} \Rightarrow C_{12,2} = 66$$

Para duas garrafas de sucos de sabores iguais temos:

$$T = 3 \cdot C_{4,2} \Rightarrow T = 3 \cdot \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow T = 18$$

Assim a probabilidade de escolher duas garrafas de mesmo sabor será:

$$P = \frac{18}{66} \Rightarrow P = \frac{3}{11}$$

Opção C

Questão 37

Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar $\frac{4}{5}$ da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros. Considerando log 2 = 0,301, o menor valor de n é igual a:

(A) 9 (B) 10 (C)11 (D) 12

Solução:
Esquematizando os dados do problema temos:

$$1 \text{ Filtro} \text{ ———— } \frac{4}{5} \text{ da intensidade}$$

$$2 \text{ Filtros} \text{ ———— } \left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{ da intensidade}$$

$$\vdots$$

$$n \text{ Filtros} \text{ ———— } \left(\frac{4}{5}\right)^n \text{ da intensidade}$$

Assim, a inequação que precisamos resolver é:

$$\frac{1}{10} I_0 > \left(\frac{4}{5}\right)^n I_0$$

Onde I_0 é a intensidade original de luz. Daí:

$$\frac{1}{10} > \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\log\frac{1}{10} > \log\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$-1 > n(\log 4 - \log 5)$$

$$-1 > n\left(2\log 2 - \log\frac{10}{2}\right)$$

$$-1 > n\left[2 \cdot 0{,}301 - (1 - 0{,}301)\right]$$

$$-n\,[3 \cdot 0,301 - 1] > 1 \Rightarrow n\,(1 - 0,903) > 1$$

$$n > \frac{1}{1 - 0,903} \Rightarrow n > 10,3$$

$$n = 11$$

Opção C

Questão 40

Observe as guias para pagamento em cota única do IPTU-2010 mostradas abaixo.


Prefeitura Municipal de Mangaratiba
IPTU 2010 - COTA ÚNICA

Controle	Inscrição Municipal
XXXXX	XXXXX
Prazo com 15% desconto	Valor em R$
26/02/2010	1.530,00

Sr. Caixa: Não receber esta Guia após o último prazo


RIO

INSCRIÇÃO XXXXX

IPTU 2010 COTA ÚNICA GUIA 00

DESCONTO: 07%

VENCIMENTO: 08/02/2010

VALOR C/ DESCONTO (R$): 2.790,00

NÃO RECEBER ESTA COTA APÓS O VENCIMENTO

AUTENTICAÇÃO MECÂNICA

Em uma delas, com o desconto de 15%, será pago o valor de R\$ 1.530,00; na outra, com o desconto de 7%, será pago o valor de R\$ 2.790,00. O desconto percentual médio total obtido com o pagamento desses valores é igual a:

(A) 6% (B) 10% (C) 11% (D) 22%

Solução:

Do enunciado, temos que, da guia da esquerda, serão pagos 85%, pois há um desconto de 15%. Logo, sendo x o valor total, tem-se:

$$0,85x = 1530 \Rightarrow x = \frac{1530}{0,85}$$

Analogamente, sendo y o valor total da guia da direita:

$$0,93y = 2790 \Rightarrow y = \frac{2790}{0,93}$$

O valor que seria pago sem desconto é dado pela expressão:

$$x + y = \frac{1530}{0,85} + \frac{2790}{0,93}$$

Chamando de D o valor total com desconto o desconto médio total (DMT) pode ser calculado como:

$$DMT = \frac{(x+y) - D}{(x+y)}$$

Substituindo os valores:

$$DMT = \frac{\frac{1530}{0,85} + \frac{2790}{0,93} - (1530 + 2790)}{\frac{1530}{0,85} + \frac{2790}{0,93}}$$

$$DMT = \frac{1530 \cdot 0,93 + 2790 \cdot 0,85 - 4320 \cdot 0,85 \cdot 0,93}{1530 \cdot 0,93 + 2790 \cdot 0,85}$$

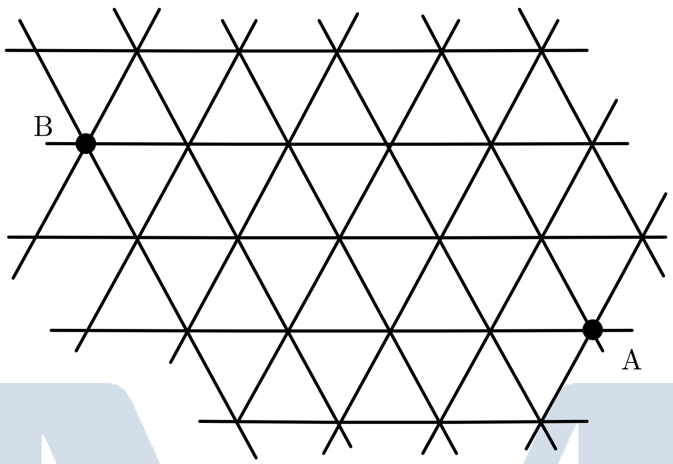
$$DMT = \frac{1422,90 + 2371,50 - 3414,96}{1422,90 + 2371,50}$$

$$DMT = \frac{379,44}{3794,40} \Rightarrow DMT = \frac{1}{10} \Rightarrow DMT = 10\%$$

Opção B

Questão 41

Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.



Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d. Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:

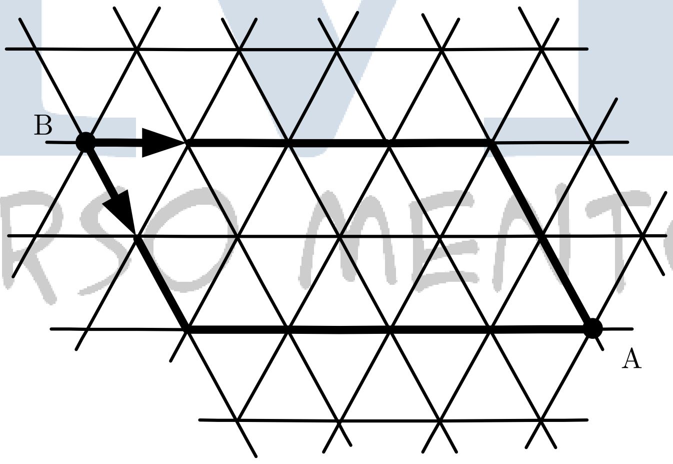
(A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10

Solução:

Partindo da figura definimos:

B_A — Deslocamento para baixo

F — Deslocamento para frente



Como o caminho deve ser mínimo (veja a figura acima) a solução será a permutação com repetição dos elementos abaixo:

$$B_A B_A FFFF$$

O que nos dá 6 movimentos apenas, ou seja, dois movimentos para baixo e quatro movimentos para frente.

Portanto:

$$T = \frac{P_6}{P_4 \cdot P_2}$$

$$T = \frac{6!}{4!2!} \Rightarrow T = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} \Rightarrow T = 15 \text{ caminhos}$$

Opção B

Vestibular 2009/2010

2º Exame de Qualificação 2009/2010

Questão 29

Uma pessoa submetida a uma determinada dieta alimentar deseja ingerir, no máximo, 500 kcal em fatias de uma torta.
Observe que:

- Valor calórico é a quantidade de energia capaz de produzir trabalho, liberada pelo metabolismo de uma certa quantidade de alimento ingerido;
- Os valores calóricos aproximados de carboidratos, lipídios e proteínas são, respectivamente, 4, 9 e 4 kcal/g;
- A torta contém, ao todo, 50% de carboidratos, 15% de lipídios e 35% de proteínas;
- Cada fatia da torta tem massa de 50 g e todas são iguais e homogêneas.

Para obedecer à dieta, a maior quantidade de fatias dessa torta que a pessoa pode comer corresponde a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Solução:
As fatias da torta mantêm a mesma proporção em relação à torta inteira, ou seja, cada fatia conterá 50% de carboidratos, 15% de lipídios e 35% de proteínas. Como cada fatia tem 50 g as quantidades serão:

$$50 \times \frac{50}{100} = 25 \text{ g} \rightarrow \text{ Carboidratos}$$

$$50 \times \frac{15}{100} = 7,5 \text{ g} \rightarrow \text{ Lipídios}$$

$$50 \times \frac{35}{100} = 17,5 \text{ g} \rightarrow \text{ Proteínas}$$

Agora que sabemos quantos gramas há em cada fatia, podemos calcular o valor calórico de cada uma:

$$\text{Carboidratos: } 4 \times 25 = 100 \text{ kcal}$$

$$\text{Lipídios: } 9 \times 7,5 = 67,5 \text{ kcal}$$

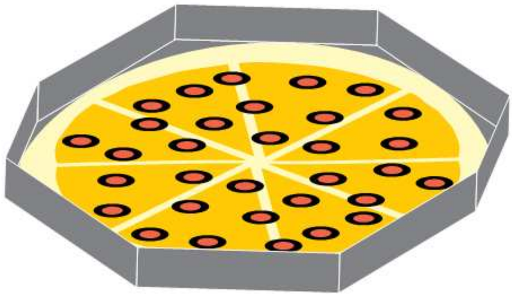
$$\text{Proteínas: } 4 \times 17,5 = 70 \text{ kcal}$$

Somando teremos o valor calórico da fatia: $100 + 67,5 + 70 = 237,5 \text{ kcal}$. Como a dieta é de no máximo 500 kcal a pessoa só poderá comer duas fatias (475 kcal).

Opção B

Questão 35

Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma pizza circular que tangencia as faces do prisma.

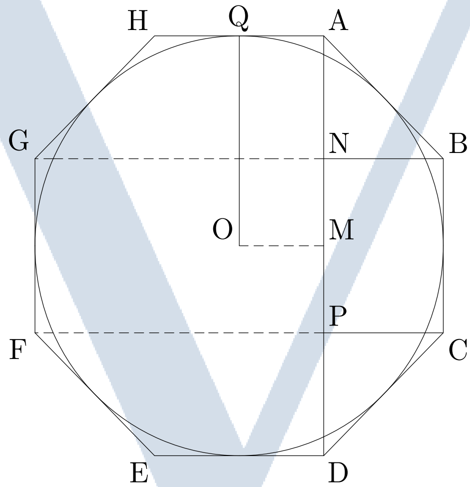


Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $3\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ (D) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Solução:

Olhando a caixa da pizza por cima teremos a seguinte figura:



Seja O o centro do octógono e da pizza. Os triângulos retângulos isósceles AND e CDP são congruentes e $AB = CD = a$. Portanto, $AN = PD$ e:

$$(AB)^2 = 2(AN)^2$$

$$AN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

O segmento AD então é

$$AD = AN + NP + PD$$

$$AD = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} + a$$

Note que OQ é igual a metade de AD, logo

$$OQ = \frac{AD}{2} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{2}} + a}{2}$$

$$OQ = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2}$$

$$OQ = \frac{a\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$$

Daí

$$\frac{OQ}{a} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

Opção C

Questão 37

Uma bola de boliche de 2 kg foi arremessada em uma pista plana. A tabela abaixo registra a velocidade e a energia cinética da bola ao passar por três pontos dessa pista: A, B e C.

Pontos	Velocidade (m/s)	Energia Cinética (J)
A	V_1	E_1
B	V_2	E_2
C	V_3	E_3

Se (E_1, E_2, E_3) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, a razão da progressão geométrica (V_1, V_2, V_3) está indicada em:

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Solução:

A expressão da energia cinética **E** de um corpo de massa **m** e velocidade **v** é:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

Como $m = 2\text{ kg}$ teremos

$$E = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow E = v^2$$

Então a P.G. (E_1, E_2, E_3) pode ser escrita como

$$\left((V_1)^2, (V_2)^2, (V_3)^2\right)$$

Como a razão desta progressão é $\frac{1}{2}$ temos que:

$$\frac{(V_3)^2}{(V_2)^2} = \frac{(V_2)^2}{(V_1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Opção C

Questão 38

Ao refazer seu calendário escolar para o segundo semestre, uma escola decidiu repor algumas aulas em exatamente 4 dos 9 sábados disponíveis nos meses de outubro e novembro de 2009, com a condição de que não fossem utilizados 4 sábados consecutivos.

Para atender às condições de reposição das aulas, o número total de conjuntos distintos que podem ser formados contendo 4 sábados é de:

(A) 80 (B) 96 (C) 120 (D) 126

Solução:

Queremos escolher 4 dentre 9 sábados disponíveis com a condição de que não sejam consecutivos. Torna-se mais fácil calcular quantas são as maneiras de termos 4 sábados consecutivos e subtrair do total de possibilidades.

Para escolher 4 entre 9 sábados:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!(9-4)!}$$

$$C_{9,4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} \Rightarrow C_{9,4} = 3 \cdot 7 \cdot 6 \Rightarrow C_{9,4} = 126$$

Chamando de S os sábados com aula e N os sábados não utilizados, as maneiras de termos 4 sábados consecutivos são

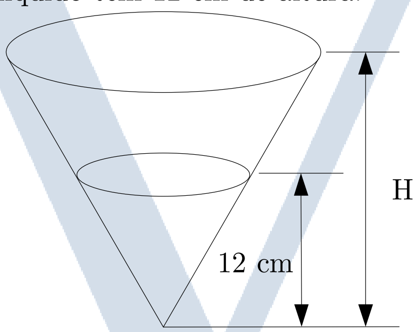
SSSSNNNNN
NSSSSNNNN
NNSSSSNNN
NNNSSSSNN
NNNNSSSSN
NNNNNSSSS

Portanto, teremos um total de $126 - 6 = 120$ maneiras de ocupar os 4 sábados sem que sejam todos consecutivos.

Opção C

Questão 39

A figura abaixo representa um recipiente cônico com solução aquosa de hipoclorito de sódio a 27%. O nível desse líquido tem 12 cm de altura.



Para o preparo de um desinfetante, diluiu-se a solução inicial com água, até completar o recipiente, obtendo-se a solução aquosa do hipoclorito de sódio a 8%.
Esse recipiente tem altura H, em centímetros, equivalente a:

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22

Solução:
A concentração da solução aquosa é de 27%, queremos que ela passe a ser de 8%. Sendo assim, seja v o volume total de solução; a concentração de hipoclorito de sódio em relação ao total é:

$$C = \frac{0,27v}{v}$$

O que quer dizer que para cada litro de solução temos 270 ml de hipoclorito de sódio. Queremos adicionar x litros de água para que 8% do total correspondam a hipoclorito de sódio. Então a nova concentração será

$$\frac{0,27v}{v+x} = \frac{8}{100}$$

Solucionando esta equação:

$$27v = 8v + 8x$$
$$8x = 19v$$
$$x = 2,375v$$

O volume final passou a ser:

$$V = v + 2,375v \Rightarrow V = 3,375v$$

A relação entre os volumes inicial e final e as respectivas alturas é

$$\frac{v}{V}=\left(\frac{12}{H}\right)^3$$

Substituindo os valores encontrados

$$\frac{v}{3,375v}=\left(\frac{12}{H}\right)^3$$

Fatorando 3375 teremos

$$\frac{1}{\frac{\left(3^3\cdot 5^3\right)}{1000}}=\left(\frac{12}{H}\right)^3$$

Daí

$$\sqrt[3]{\frac{1000}{15^3}}=\frac{12}{H}$$

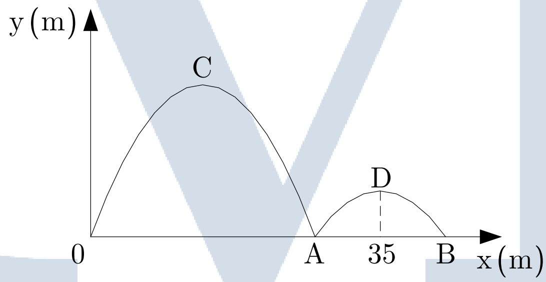
$$H=\frac{12\cdot 15}{10}$$

$$H=18\text{ cm}$$

Opção B

Questão 40

Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.

A equação de uma dessas parábolas é $y=-\frac{x^2}{75}+\frac{2x}{5}$.

Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

(A) 38 (B) 40 (C) 45 (D) 50

Solução:

Vamos calcular as raízes da parábola $y=-\frac{x^2}{75}+\frac{2x}{5}$:

$$-\frac{x^2}{75}+\frac{2x}{5}=0$$

$$\frac{x}{5}\left(-\frac{x}{15}+2\right)=0$$

Então

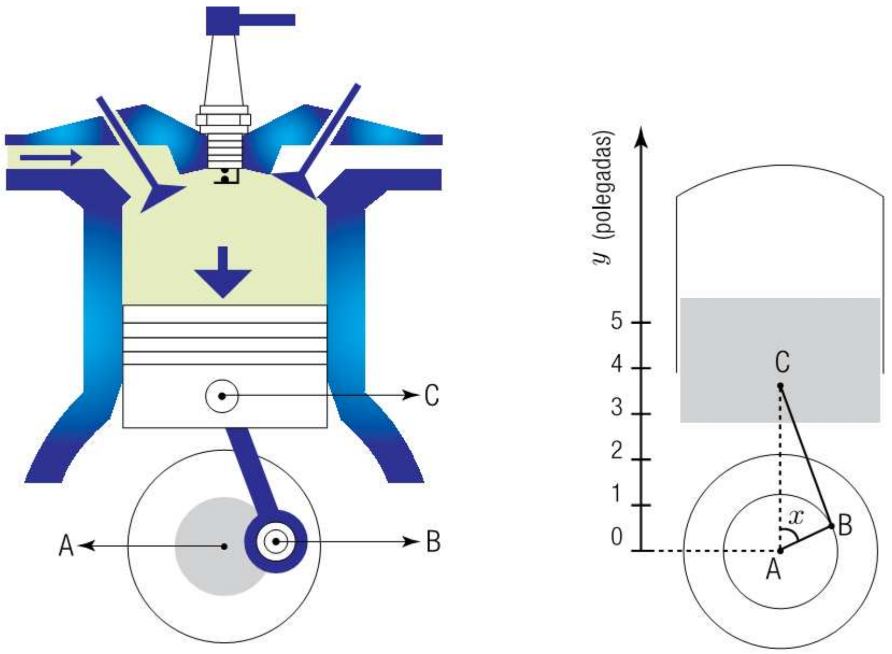
$$\frac{x}{5}=0\Rightarrow x=0 \text{ ou } -\frac{x}{15}=-2\Rightarrow x=30$$

Concluímos, portanto que $x = 0$ e $x = 30$ são as raízes da parábola com vértice C. A outra parábola tem a abscissa do vértice $x = 35$. Como a parábola é simétrica em relação ao vértice, em B teremos $x = 40$.
Assim a distância OB vale 40 metros.

Opção B

Questão 41

Observe abaixo a ilustração de um pistão e seu esquema no plano.



O pistão é ligado, por meio da haste BC, a um disco que gira em torno do centro A.
Considere que:

- o raio AB e a haste BC medem, respectivamente, 1 polegada e 4 polegadas;
- à medida que o disco gira, o pistão move-se verticalmente para cima ou para baixo, variando a distância AC e o ângulo $B\hat{A}C$.

Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é dada por x radianos, a distância entre A e C, em polegadas, pode ser obtida pela seguinte equação:

(A) $y = 4 + \operatorname{sen} x$

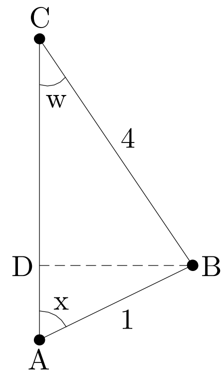
(B) $y = 4 + \cos x$

(C) $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{16 - \cos^2 x}$

(D) $y = \cos x + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x}$

Solução:

Na figura abaixo, temos o triângulo ABC e traçamos BD perpendicular a AC:



Fica claro que a distância CA é dada por $AD = CD + DA$. Calculando CD e DA teremos:

$$\cos w = \frac{CD}{4} \Rightarrow CD = 4\cos w$$

$$\cos x = \frac{DA}{1} \Rightarrow DA = \cos x$$

Usando a lei dos senos no triângulo ABC teremos:

$$\frac{1}{\text{sen}w} = \frac{4}{\text{sen}x}$$

$$\text{sen}w = \frac{\text{sen}x}{4}$$

Usando a relação $\text{sen}^2 w + \cos^2 w = 1 \Rightarrow \cos w = \sqrt{1 - \text{sen}^2 w}$ e calculando CA:

$$CA = 4\cos w + \cos x$$

$$CA = 4\sqrt{1 - \text{sen}^2 w} + \cos x$$

$$CA = 4\sqrt{1 - \left(\frac{\text{sen}x}{4}\right)^2} + \cos x$$

$$CA = 4\sqrt{\frac{16 - \text{sen}^2 x}{16}} + \cos x$$

$$CA = \sqrt{16 - \text{sen}^2 x} + \cos x$$

Opção D

1º Exame de Qualificação 2009/2010

Questão 24

O butano é um gás utilizado como matéria-prima na síntese de diferentes compostos, como, por exemplo, o 1,4-dibromobutano. Esse composto pode ser obtido a partir da reação de substituição entre o butano e o bromo molecular.

Substituindo-se simultaneamente e de forma aleatória dois átomos de hidrogênio do butano por dois átomos de bromo, a probabilidade de que seja obtido o 1,4-dibromobutano é igual a:

(A) 0,2 (B) 0,4 (C) 0,6 (D) 0,8

Solução:

Apesar de esta questão se encaixar mais em um contexto de química do que de matemática. Damos aqui uma explicação a cerca da probabilidade envolvida. O primeiro passo é descobrir como é o butano para que saibamos exatamente quantas são as maneiras de substituirmos dois bromos. Então:

$$-\overset{|}{\underset{|}{C}}-\overset{|}{\underset{|}{C}}-\overset{|}{\underset{|}{C}}-\overset{|}{\underset{|}{C}}-$$

Temos 10 hidrogênios para retirarmos, ou seja, queremos dois entre 10:

$$C_{10,2} = \frac{10!}{2!8!} \Rightarrow C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2!8!} \Rightarrow C_{10,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} \Rightarrow C_{10,2} = 45 \text{ maneiras}$$

Como o composto é o 1,4-dibromobutano só poderemos substituir os hidrogênnios nos carbonos "das pontas", ou seja:

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ maneiras}$$

A probabilidade pode ser calculada então:

$$P = \frac{9}{45} \Rightarrow P = 0,2$$

Opção A

Observação: Encontramos professores discordando da solução, justificando que há diferenças (ou semelhanças) significativas em compostos químicos que afetariam a probabilidade. Deixamos esta discussão de lado, mas recomendamos buscar mais fontes a este respeito.

Questão 31

Um conjunto de 100 copos descartáveis, dispostos em um suporte, serão usados em uma festa.

Considere, agora, as seguintes informações:

– sempre se tenta retirar apenas 1 copo de cada vez desse suporte;
– quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 2 saem juntos, 1 deles é desperdiçado;
– quando se tenta retirar 1 copo, e exatamente 3 saem juntos, 2 deles são desperdiçados;
– quando se tenta retirar 1 copo, nunca saem 4 ou mais de 4 juntos;
– foram retirados todos os copos desse suporte, havendo desperdício de 35% deles.
– a razão entre o número de vezes em que foram retirados exatamente 2 copos juntos e o número de vezes em que foram retirados exatamente 3 juntos foi de $\frac{3}{2}$.

O número de vezes em que apenas 1 copo foi retirado do suporte é igual a:

(A) 30 (B) 35 (C) 40 (D) 45

Solução:

Seja R_1 o número de vezes em que saiu um copo; R_2, o número de vezes em que se tentou retirar 1 copo, e exatamente 2 saíram juntos; e, R_3, o número de vezes em que se tentou retirar 1 copo, e exatamente 2 saíram juntos.
Do enunciado sabemos que:

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{3}{2}$$

Como foram desperdiçados 35% de 100 teremos:

$$R_2 + 2 \cdot R_3 = \frac{35}{100} \cdot 100 \Rightarrow R_2 + 2 \cdot R_3 = 35$$

Como o total é de 100 copos e não sobrou nenhum:

$$R_1 + 2R_2 + 3R_3 = 100$$

Da primeira equação:

$$R_2 = R_3 \cdot \frac{3}{2}$$

Substituindo na segunda:

$$R_3 \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot R_3 = 35$$

$$\frac{3R_3 + 4R_3}{2} = 35 \Rightarrow 7R_3 = 70 \Rightarrow R_3 = 10$$

O que nos dá para R_2:

$$R_2 = 10 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow R_2 = 15$$

Na terceira equação:

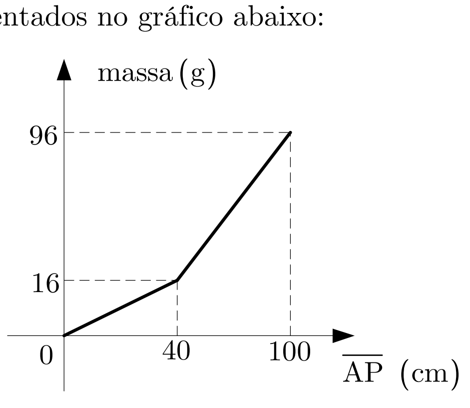
$$R_1 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 100 \Rightarrow R_1 = 40$$

Opção C

Questão 33

A figura a seguir representa um fio AB de comprimento igual a 100 cm, formado de duas partes homogêneas sucessivas: uma de alumínio e outra, mais densa, de cobre. Uma argola P que envolve o fio é deslocada de A para B.

Durante esse deslocamento, a massa de cada pedaço de comprimento de AP é medida. Os resultados estão representados no gráfico abaixo:



A razão entre a densidade do alumínio e a densidade do cobre é aproximadamente igual a:

(A) 0,1 (B) 0,2 (C) 0,3 (D) 0,4

Solução:

Como há uma "quebra" no gráfico em $\overline{AP} = 40\text{ cm}$ sabemos que é aí que está a mudança de material. Considerando **r** o raio do fio e, seu comprimento, como sua altura, podemos calcular os dois volumes:

$$V_1 = \pi r^2 \cdot 40$$
$$V_2 = \pi r^2 \cdot 60$$

As densidades, portanto, serão:

$$d_1 = \frac{m_1}{V_1} \Rightarrow d_1 = \frac{16}{\pi r^2 \cdot 40}$$
$$d_2 = \frac{m_2}{V_2} \Rightarrow d_2 = \frac{80}{\pi r^2 \cdot 60}$$

Analisando as frações vemos que $d_2 > d_1$. A maior densidade é a do cobre, logo o que queremos é:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{16}{\pi r^2 \cdot 40}}{\frac{80}{\pi r^2 \cdot 60}} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{16}{\pi r^2 \cdot 40} \cdot \frac{\pi r^2 \cdot 60}{80}$$
$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{16}{40} \cdot \frac{60}{80} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{d_1}{d_2} = 0,3$$

Observação: Você chegaria à mesma resposta sem considerar o volume, ou seja, apenas considerando o comprimento. Basta verificar que a expressão que representa a área da base é cancelada. Em outras palavras, a espessura do fio é mesma ao longo de seu comprimento o que quer dizer que a densidade se mantém ao longo do mesmo.

Opção C

Questão 39

O Globo, 18/03/2009

Considere como um único conjunto as 8 crianças – 4 meninos e 4 meninas – personagens da tirinha. A partir desse conjunto, podem-se formar n grupos, não vazios, que apresentam um número igual de meninos e de meninas.

O maior valor de n é equivalente a:

(A) 45 (B) 56 (C) 69 (D) 81

Solução:

Grupos de **1** menino e **1** menina:

$$4 \times 4 = 16 \text{ possibilidades}$$

Grupos de **2** meninos e **2** meninas:

$$C_{4,2} \cdot C_{4,2} = \left(\frac{4!}{2!2!}\right)^2 \Rightarrow C_{4,2} \cdot C_{4,2} = \left(\frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!}\right)^2 = 36 \text{ possibilidades}$$

Grupos de **3** meninos e **3** meninas:

$$C_{4,3} \cdot C_{4,3} = \left(\frac{4!}{3!1!}\right)^2 \Rightarrow C_{4,3} \cdot C_{4,3} = \left(\frac{4 \cdot 3!}{3!1!}\right)^2 = 16 \text{ possibilidades}$$

Grupos de **4** meninos e **4** meninas:

$$1 \times 1 = 1 \text{ possibilidade}$$

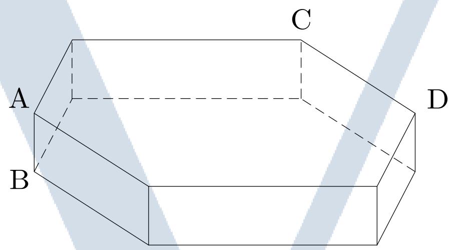
Somando o total de maneiras:

$$T = 16 + 36 + 16 + 1 = 69 \text{ maneiras}$$

Opção C

Questão 41

A figura abaixo representa uma piscina completamente cheia de água, cuja forma é um prisma hexagonal regular.



Admita que:

– A, B, C e D representam vértices desse prisma;

– o volume da piscina é igual a 450 m³ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$;

– um atleta nada, em linha reta, do ponto A até o ponto médio da aresta $\overline{CD}$, utilizando apenas glicose como fonte de energia para seus músculos.

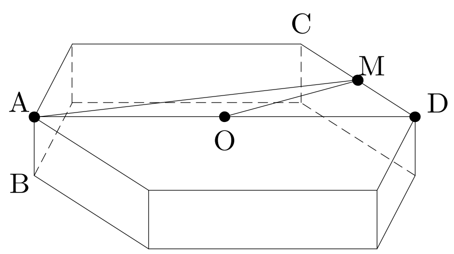
A velocidade média do atleta no percurso definido foi igual a 1,0 m/s.

O intervalo de tempo, em segundos, gasto nesse percurso equivale a cerca de:

(A) 12,2 (B) 14,4 (C) 16,2 (D) 18,1

Solução:

Para descobrirmos o tempo de percurso, precisamos encontrar a distância de **A** a **M** (ponto médio de $\overline{CD}$). Seja **O** o centro da face superior. Traçamos AD, OM e OM; na figura:



Se l é o lado do hexágono, temos que:

$$\overline{AO} = \overline{OD} = l$$

Como OCD é triângulo equilátero, temos:

$$\begin{cases} \overline{MD} = \dfrac{l}{2} \\ \overline{OM} = \dfrac{l\sqrt{3}}{2} \\ M\hat{O}D = 30° \end{cases}$$

Usando a lei dos cossenos no triângulo AOM:

$$\left(\overline{AM}\right)^2 = \left(\overline{AO}\right)^2 + \left(\overline{OM}\right)^2 - 2 \cdot \overline{AO} \cdot \overline{OM} \cdot \cos\left(A\hat{O}M\right)$$

$$\left(\overline{AM}\right)^2 = l^2 + \left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(150°)$$

$$\left(\overline{AM}\right)^2 = l^2 + \frac{3l^2}{4} + l^2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\overline{AM}\right)^2 = l^2 + \frac{3l^2}{4} + \frac{3l^2}{2} \Rightarrow \left(\overline{AM}\right)^2 = \frac{4l^2 + 3l^2 + 6l^2}{4}$$

$$\left(\overline{AM}\right)^2 = \frac{13l^2}{4} \Rightarrow \overline{AM} = \frac{l\sqrt{13}}{2}$$

O volume da piscina pode ser calculado através da expressão:

$$V = S_{Base} \cdot h \Rightarrow V = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{AB}$$

Como $V = 450\ m^3$ e $\overline{CD} = l$:

$$450 = 6 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot \overline{AB}$$

Do enunciado:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\sqrt{3}}{10} \Rightarrow \overline{AB} = l\frac{\sqrt{3}}{10}$$

Portanto:

$$450 = 3 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{2} \cdot l\frac{\sqrt{3}}{10} \Rightarrow 150 = \frac{3l^3}{20} \Rightarrow l^3 = 1000 \Rightarrow l = 10\ m$$

Voltando ao cálculo de AM:

$$\overline{AM} = \frac{10\sqrt{13}}{2} \Rightarrow \overline{AM} = 5\sqrt{13}\ m$$

Como $v = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ teremos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow 1 = \frac{5 \cdot \sqrt{13}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 5 \cdot 3,6 \Rightarrow \Delta t = 18\ s$$

Opção D

Vestibular 2008/2009

2º Exame de Qualificação 2008/2009

Questão 23

Um estudante possui dez figurinhas, cada uma com o escudo de um único time de futebol, distribuídas de acordo com a tabela:

Time/escudo	Quantidade de figurinhas idênticas
A	3

B	2
C	1
D	1
E	1
F	1
G	1

Para presentear um colega, o estudante deseja formar um conjunto com cinco dessas figurinhas, atendendo, simultaneamente, aos seguintes critérios:
— duas figurinhas deverão ter o mesmo escudo;
— três figurinhas deverão ter escudos diferentes entre si e também das outras duas.
De acordo com esses critérios, o número máximo de conjuntos distintos entre si que podem ser formados é igual a:

(A) 32 (B) 40 (C) 56 (D) 72

Solução:
Para escolher duas figurinhas com o mesmo escudo o amigo só poderá escolher do time **A** ou do time **B**, uma vez que só desses times é que o estudante possui mais de uma figurinha. Além disso, vamos considerar as figurinhas do time A (ou B) idênticas entre si. Então, temos então as opções:
1) 2 figurinhas do **time A**, **1** do **time B** e 2 escolhidas entre os outros 5 times:

$$T_1 = C_{3,2} \cdot [B_1] \cdot C_{5,2} + C_{3,2} \cdot [B_2] \cdot C_{5,2}$$

Observação: Repare que a escolha de figurinhas do time B deve ser observada, pois os escudos devem ser diferentes, então:

$$T_1 = C_{3,2} \cdot [B_1] \cdot C_{5,2} + C_{3,2} \cdot [B_2] \cdot C_{5,2} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{5!}{2!3!} = 60$$

Esta conta considera as figurinhas do time A diferentes entre si, bem como as do time B. Precisamos então dividir por 6:

$$\frac{T_1}{6} = 10$$

2) 2 figurinhas do **time B**, 1 do **time A** e 3 escolhidas entres os outros 5 times:

$$T_2 = C_{2,2} \cdot [A_1] \cdot C_{5,2} + C_{2,2} \cdot [A_2] \cdot C_{5,2} + C_{2,2} \cdot [A_3] \cdot C_{5,2} = 3 \cdot 10 = 30$$

Esta conta considera as figurinhas do time A diferentes entre si, bem como as do time B. Precisamos então dividir por 3:

$$\frac{T_2}{3} = 10$$

3) 2 figurinhas do **time A** e 3 escolhidas entre os outros 5 times, excluindo-se o **time B**:

$$T_3 = C_{3,2} \cdot C_{5,3}$$
$$T_3 = 3 \cdot 10 = 30$$

Mais uma vez "descontando" as repetições de A:

$$\frac{T_3}{3} = 10$$

4) 2 figurinhas do **time B** e 3 escolhidas entre os outros 5 times, excluindo-se o **time A**:

$$T_4 = C_{2,2} \cdot C_{5,3}$$
$$T_4 = 1 \cdot 10 = 10$$

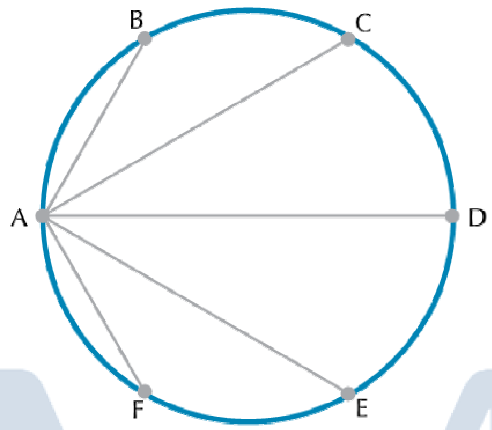
Somando tudo:

$$T = 10 + 10 + 10 + 10 \Rightarrow T = 40$$

Opção B

Questão 28

Um atleta faz seu treinamento de corrida em uma pista circular que tem 400 metros de diâmetro. Nessa pista, há seis cones de marcação indicados pelas letras A, B, C, D, E e F, que dividem a circunferência em seis arcos, cada um medindo 60 graus.
Observe o esquema:



O atleta partiu do ponto correspondente ao cone A em direção a cada um dos outros cones, sempre correndo em linha reta e retornando ao cone A. Assim, seu percurso correspondeu a ABACADAEAFA.
Considerando, o total de metros percorridos pelo atleta nesse treino foi igual a:

(A) 1480 (B) 2960 (C) 3080 (D) 3120

Solução:
Como o círculo está dividido em 6 arcos de 60° os pontos A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular.
O diâmetro é de 400 metros logo o raio do círculo é de 200 m. O que nos dá:

$$AB = AF = 200 \text{ m}$$

Ligando os pontos C e D temos o triângulo ACD que é retângulo em C. Usando o Teorema de Pitágoras:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$400^2 = AC^2 + 200^2 \Rightarrow AC^2 = 200^2 \cdot 3$$
$$AC = 200\sqrt{3} \text{ m}$$

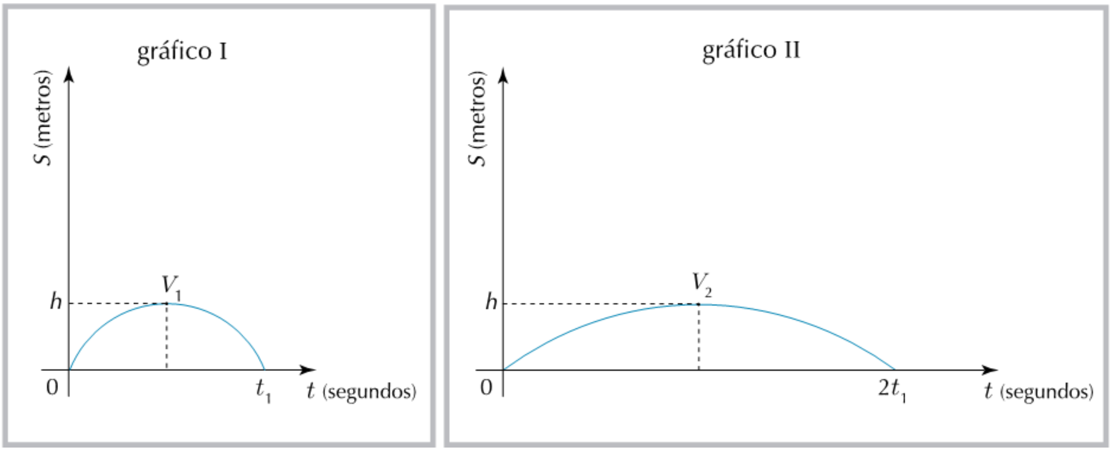
O percurso total tem comprimento:

$$2AB + 2AC + 2AD + 2AE + 2AF =$$
$$= 2\left(200 + 200\sqrt{3} + 400 + 200\sqrt{3} + 200\right)$$
$$= 2\left(800 + 400\sqrt{3}\right)$$
$$= 1600 + 800 \cdot 1,7$$
$$\cong 2960 \text{ m}$$

Opção B

Questão 32

Os gráficos I e II representam as posições S de dois corpos em função do tempo t.



No gráfico I, a função horária é definida pela equação $S = a_1t^2 + b_1t$ e, no gráfico II, por $S = a_2t^2 + b_2t$. Admita que V_1 e V_2 são, respectivamente, os vértices das curvas traçadas nos gráficos I e II.

Assim, a razão $\frac{a_1}{a_2}$ é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

Solução:
Podemos escrever cada equação em função de suas raízes:

$$S_I = a_1(t-0)(t-t_1)$$
$$S_{II} = a_2(t-0)(t-2t_1)$$

As coordenadas de cada vértice são:

$$V_1\left(\frac{t_1}{2}, h\right)$$
$$V_2(t_1, h)$$

Substituindo estas coordenadas nas respectivas equações temos:

$$h = a_1\left(\frac{t_1}{2}\right)\left(\frac{t_1}{2} - t_1\right) \Rightarrow h = -a_1\left(\frac{t_1}{2}\right)^2$$
$$h = a_2(t_1)(t_1 - 2t_1) \Rightarrow h = -a_2(t_1)^2$$

Dividindo uma equação pela outra:

$$\frac{h}{h} = \frac{-a_1\left(\frac{t_1}{2}\right)^2}{-a_2(t_1)^2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = 4$$

Opção C

Questão 40

Em um supermercado, um cliente empurra seu carrinho de compras passando pelos setores 1, 2 e 3, com uma força de módulo constante de 4 newtons, na mesma direção e mesmo sentido dos deslocamentos. Na matriz A abaixo, cada elemento a_{ij} indica, em joules, o trabalho da força que o cliente faz para deslocar o carrinho do setor i para o setor j, sendo i e j elementos do conjunto {1, 2, 3}.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 40 & 60 \\ 40 & 0 & 80 \\ 60 & 80 & 0 \end{bmatrix}$$

Ao se deslocar do setor 1 ao 2, do setor 2 ao 3 e, por fim, retornar ao setor 1, a trajetória do cliente descreve o perímetro de um triângulo.
Nessas condições, o cliente percorreu, em metros, a distância de:

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50

Solução:
O trabalho de uma força paralela ao seentido do deslocamento é dada pela expressão:

$$W = Fd$$

De **1** para **2**, temos o elemento a_{12} da matriz, calculando d_{12}:

$$d_{12} = \frac{40}{4} \Rightarrow d_{12} = 10 \text{ m}$$

De **1** para **3**, temos o elemento a_{13} da matriz, calculando d_{13}:

$$d_{13} = \frac{60}{4} \Rightarrow d_{13} = 15 \text{ m}$$

De **2** para **3**, temos o elemento a_{23} da matriz, calculando d_{23}:

$$d_{23} = \frac{80}{4} \Rightarrow d_{23} = 20 \text{ m}$$

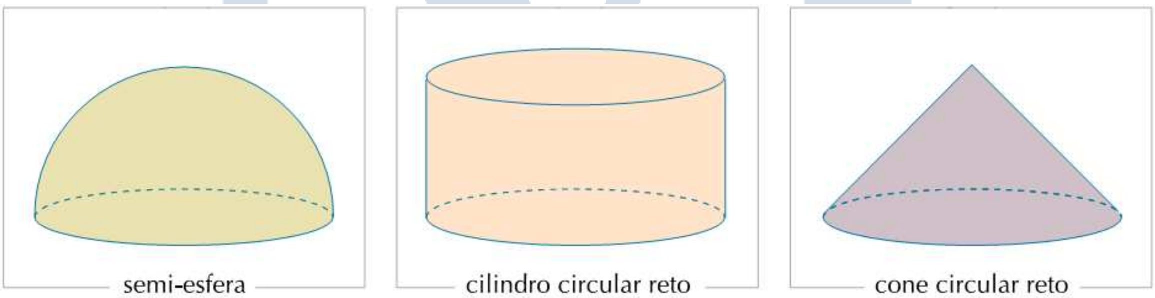
O perímetro do triângulo será então:

$$10 + 20 + 15 = 45 \text{ m}$$

Opção C

Questão 41

Nas ilustrações abaixo, estão representados três sólidos de bases circulares, todos com raios iguais e mesma altura. Considere as medidas dos raios iguais às medidas das alturas, em centímetros.



As massas específicas de quatro substâncias, três das quais foram empregadas na construção desses sólidos, estão indicadas na tabela:

substâncias	Massa específica $(g \cdot cm^{-3})$
w	2
x	3
y	4
z	6

Admita que os sólidos tenham a mesma massa e que cada um tenha sido construído com apenas uma dessas substâncias.
De acordo com esses dados, o cone circular reto foi construído com a seguinte substância:

(A) w (B) x (C) y (D) z

Solução:
Sabemos que a densidade (nesse caso igual à massa específica) se relaciona com o volume através da expressão:

$$d = \frac{m}{V}$$

Vamos calcular os volumes do sólidos:
Semi-esfera:

$$V_{se} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} \Rightarrow V_{se} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Cilindro:

$$V_c = \pi r^2 \cdot r \Rightarrow V_c = \pi r^3$$

Cone:

$$V_{co} = \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \Rightarrow V_{co} = \frac{1}{3}\pi r^3$$

Como todas as massas são iguais, quanto **maior o volume**, **menor a massa específica**, portanto, colocando em ordem **crescente** de massa específica teremos **cilindro**, **semi-esfera** e **cone**.
Igualando as massas teremos:

$$d_{se}V_{se} = d_{co}V_{co} = d_cV_c$$

Substituindo os volumes:

$$d_{se} \cdot \frac{2}{3} = d_{co} \cdot \frac{1}{3} = d_c$$

O que nos dá:

$$2d_{se} = d_{co} = 3d_c$$

A massa específica do cone deve ser a maior de todas, ou seja:
Hipótese 1: $d_{co} = 6$:
Teremos:

$$\begin{cases} d_{se} = 3 \\ d_c = 2 \end{cases}$$

Hipótese 2: $d_{co} = 4$:
Teremos:

$$\begin{cases} d_{se} = 2 \\ d_c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Observando a tabela dada, vemos que só a hipótese 1 é válida. A massa específica igual a 2 é da substância w.

Opção A

Questão 42

Muitas jóias são constituídas por ligas feitas de uma mistura de ouro puro com outros metais.

Uma jóia é considerada de ouro n quilates se $\frac{n}{24}$ de sua massa for de ouro, sendo n um número inteiro, maior ou igual a 1 e menor ou igual a 24.
Uma aliança de ouro 15 quilates tem massa igual a 4 g.

Para transformar essa aliança em outra, de ouro 18 quilates, mantendo a quantidade dos outros metais, é necessário acrescentar, em sua liga, uma quantidade de gramas de ouro puro equivalente a:

(A) 1,0 (B) 1,5 (C) 2,0 (D) 3,0

Solução:

Por definição, uma aliança será de 18 quilates se $\frac{18}{24}$ de sua massa for de ouro, sendo $1 \leq n \leq 18$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, inicialmente a aliança era de 15 quilates:

$$\frac{15}{24} \cdot 4 = m$$

Onde m é a massa de ouro inicial. Calculando m:

$$m = 2,5 \text{ g}$$

Para que a aliança seja de 18 quilates:

$$\frac{18}{24} \cdot (4 + x) = 2,5 + x$$

Onde x é a massa de ouro puro adicionada. Calculando x:

$$\frac{3}{4} \cdot (4 + x) = 2,5 + x$$

$$12 + 3x = 10 + 4x$$

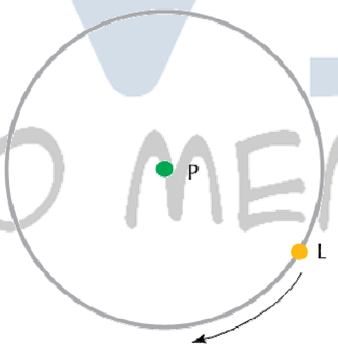
$$x = 2 \text{ g}$$

Opção C

Questão 43

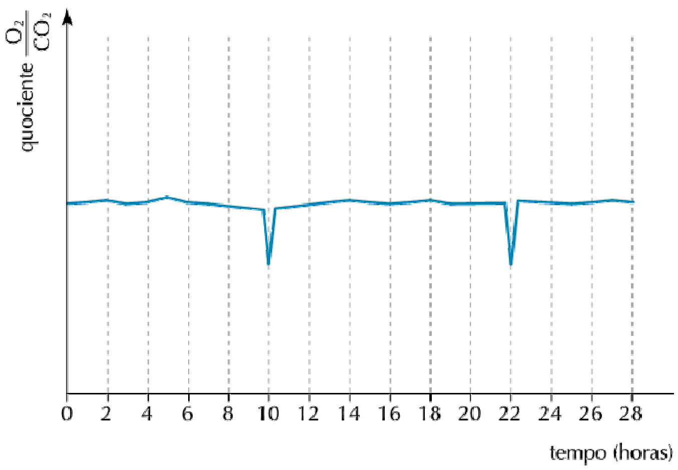
Uma pequena planta é colocada no centro P de um círculo, em um ambiente cuja única iluminação é feita por uma lâmpada L. A lâmpada é mantida sempre acesa e percorre o perímetro desse círculo, no sentido horário, em velocidade constante, retornando a um mesmo ponto a cada período de 12 horas.

Observe o esquema:



No interior desse círculo, em um ponto O, há um obstáculo que projeta sua sombra sobre a planta nos momentos em que P, O e L estão alinhados, e o ponto O está entre P e L.

Nessas condições, mediu-se, continuamente, o quociente entre as taxas de emissão de O_2 e de CO_2 da planta. Os resultados do experimento estão mostrados no gráfico, no qual a hora zero corresponde ao momento em que a lâmpada passa por um ponto A.

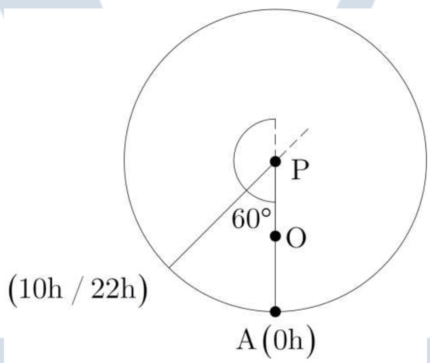


As medidas, em graus, dos ângulos formados entre as retas AP e PO são aproximadamente iguais a:

(A) 20 e 160 (B) 30 e 150 (C) 60 e 120 (D) 90 e 90

Solução:

Através do gráfico notamos que a planta fica "na sombra" às 10 e às 22 horas. A lâmpada leva 12 horas para completar 360°; o que quer dizer que ela percorre 30° a cada hora. Logo, entre o ponto A e a primeira "sombra" há um arco de 60°. Veja a figura:



Fica claro que os ângulos são 60° e 120°.

Opção C

1º Exame de Qualificação 2008/2009

Questão 25

Um pesquisador possui em seu laboratório um recipiente contendo 100 exemplares de Aedes aegypti, cada um deles contaminado com apenas um dos tipos de vírus, de acordo com a seguinte tabela:

Tipo	Quantidade de mosquitos
DEN 1	30
DEN 2	60
DEN 3	10

Retirando-se simultaneamente e ao acaso dois mosquitos desse recipiente, a probabilidade de que pelo menos um esteja contaminado com o tipo DEN 3 equivale a:

(A) $\frac{8}{81}$ (B) $\frac{10}{99}$ (C) $\frac{11}{100}$ (D) $\frac{21}{110}$

Solução:

Queremos que, de dois mosquitos retirados, pelo menos um seja do tipo DEN 3, ou seja, pode sair um mosquito "DEN 3" depois outro e vice-versa:

Probalidade de retirada de um mosquito entre dois:

$$P_1 = \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99}$$

Ou, sair os dois do tipo DEN 3:

$$P_2 = \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99}$$

Somando estas probabilidades:

$$P_T = P_1 + P_2 = \frac{10}{100} \cdot \frac{90}{99} + \frac{90}{100} \cdot \frac{10}{99} + \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99}$$

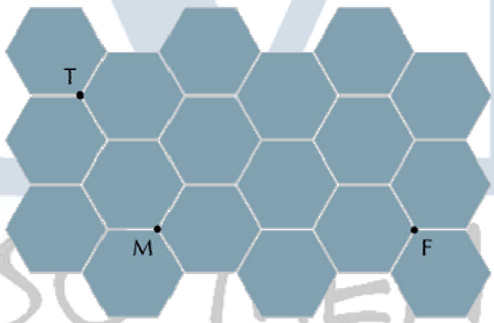
$$P_T = P_1 + P_2 = 2 \cdot \frac{900}{9900} + \frac{90}{9900}$$

$$P_T = \frac{1890}{9900} \Rightarrow P_T = \frac{189}{990} \Rightarrow P_T = \frac{21}{110}$$

Opção D

Questão 27

Um piso plano é revestido de hexágonos regulares congruentes cujo lado mede 10 cm. Na ilustração de parte desse piso, T, M e F são vértices comuns a três hexágonos e representam os pontos nos quais se encontram, respectivamente, um torrão de açúcar, uma mosca e uma formiga.



Ao perceber o açúcar, os dois insetos partem no mesmo instante, com velocidades constantes, para alcançá-lo. Admita que a mosca leve 10 segundos para atingir o ponto T. Despreze o espaçamento entre os hexágonos e as dimensões dos animais.

A menor velocidade, em centímetros por segundo, necessária para que a formiga chegue ao ponto T no mesmo instante em que a mosca, é igual a:

(A) 3,5 (B) 5,0 (C) 5,5 (D) 7,0

Solução:

Seja l o lado de cada hexágono do piso. A distância entre M e F é de $5l$. Para calcular a distância entre F e T podemos usar a lei dos cossenos, lembrando que o ângulo $T\hat{M}F = 120°$ (2 ângulos internos de triângulos equiláteros):

$$x^2 = (3l)^2 + (5l)^2 - 2 \cdot 3l \cdot 5l \cdot \cos(120°)$$

$$x^2 = 9l^2 + 25l^2 - 30l^2 \cdot \cos(120°)$$

$$x^2 = 34l^2 - 30l^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 = 34l^2 + 15l^2$$
$$x^2 = 49l^2 \Rightarrow x = 7l$$

A formiga só tem os mesmos 10 segundos para chegar e precisa cobrir 70 cm, então:

$$v_{formiga} = \frac{70}{10} \Rightarrow v_{formiga} = 7 \text{ cm} / \text{s}$$

Opção D

Questão 30

Um vírus, formado por uma hélice simples de RNA, contendo 51×10^3 bases nitrogenadas, sofreu o seguinte processo de manipulação em um experimento:

— dois fragmentos de RNA, identificados como **X** e **Y**, contendo cada um 10^3 e 10^4 bases, respectivamente, foram retirados de seu genoma;

— apenas um fragmento de RNA, contendo *n* bases, foi introduzido nele.

Admita que o número total de bases, após a modificação, equivalia ao quinto termo de uma progressão geométrica, na qual o número de bases dos fragmentos **X** e **Y** correspondia, respectivamente, ao primeiro e ao terceiro termos dessa progressão.

No experimento, a quantidade *n* de bases nitrogenadas contidas no fragmento introduzido no vírus foi igual a:

(A) 3×10^2 (B) 5×10^3 (C) 6×10^4 (D) 4×10^5

Solução:

Reproduzindo o que foi dito no enunciado teremos:

$$51 \cdot 10^3 - 10^3 - 10^4 + n = a_5$$

Sabemos ainda que

$$\left(10^3, a_2, 10^4, a_4, a_5\right)$$

É uma P.G. Logo, usando as propriedades de uma P.G.:

$$\left(10^4\right)^2 = 10^3 \cdot a_5 \Rightarrow a_5 = \frac{10^8}{10^3} \Rightarrow a_5 = 10^5$$

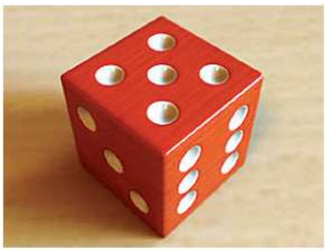
Voltando à primeira equação:

$$n = 10^5 - 51 \cdot 10^3 + 10^3 + 10^4$$
$$n = 100 \cdot 10^3 - 51 \cdot 10^3 + 10^3 + 10 \cdot 10^3$$
$$n = (100 - 51 + 1 + 10)10^3$$
$$n = 60 \cdot 10^3 \Rightarrow n = 6 \cdot 10^4$$

Opção C

Questão 33

Observe o dado ilustrado abaixo, formado a partir de um cubo, e com suas seis faces numeradas de 1 a 6.



Esses números são representados por buracos deixados por semi-esferas idênticas retiradas de cada uma das faces. Todo o material retirado equivale a 4,2% do volume total do cubo.

Considerando $\pi = 3$, a razão entre a medida da aresta do cubo e a do raio de uma das semi-esferas, expressas na mesma unidade, é igual a:

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 10

Solução:
Precisamos saber primeiro quantas semi-esferas são:

$$1+2+3+4+5+6=21$$

Usando o volume da semi-esfera temos:

$$V_S = 21 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3}$$

Sabemos que isto equivale a 4,2% do volume do cubo, logo:

$$21 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4,2}{100} \cdot a^3$$

$$21 \cdot \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{42}{1000} \cdot a^3$$

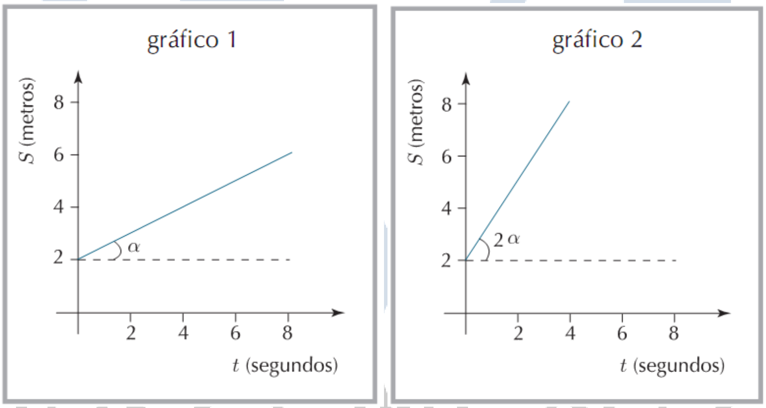
$$\frac{\pi r^3}{3} = \frac{1}{1000} \cdot a^3 \Rightarrow 1000 = \frac{a^3}{r^3}$$

$$\frac{a^3}{r^3} = \sqrt{1000} \Rightarrow \frac{a}{r} = 10$$

Opção D

Questão 42

Os gráficos 1 e 2 representam a posição S de dois corpos em função do tempo t.



No gráfico 1, a função horária é definida pela equação $S = 2 + \frac{1}{2}t$.

Assim, a equação que define o movimento representado pelo **gráfico 2** corresponde a:

(A) $S = 2 + t$ (B) $S = 2 + 2t$ (C) $S = 2 + \frac{4}{3}t$ (D) $S = 2 + \frac{6}{5}t$

Solução:
Do primeiro gráfico, podemos obter, através da expressão, o coeficiente angular:

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{1}{2}$$

No segundo o gráfico o coeficiente angular será dado por:

$$a = \text{tg}(2\alpha)$$

Sabemos que:

$$\text{tg}(2\alpha) = \frac{2 \cdot \text{tg}(\alpha)}{1 - \text{tg}^2(\alpha)}$$

Então:

$$a = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$a = \frac{1}{\frac{3}{4}} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

Como o coeficiente linear é o mesmo para os dois gráficos, temos que $b = 2$.

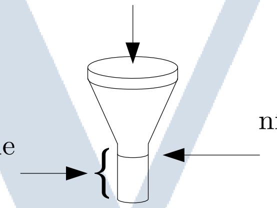
Opção C

Vestibular 2005/2006

1º Exame de Qualificação 2005/2006

Questão 27

Para a obtenção do índice pluviométrico, uma das medidas de precipitação de água da chuva, utiliza-se um instrumento meteorológico denominado pluviômetro.
A ilustração abaixo representa um pluviômetro com área de captação de 0,5 m^2 e raio interno do cilindro de depósito de 10 cm.



Considere que cada milímetro de água da chuva depositado no cilindro equivale a 1 L/m^2.
No mês de janeiro, quando o índice pluviométrico foi de 90 mm, o nível de água no cilindro, em dm, atingiu a altura de, aproximadamente:

(A) 15 (B) 25 (C) 35 (D) 45

Solução:
O cilindro de depósito tem raio de 10 cm. Como o índice pluviométrico foi de 90 mm e cada mm corresponde a 1 L/m^2, podemos fazer a seguinte regra de três:

mm		**L/m^2**
1	—	1
90	—	x

Calculando x:

$$\frac{1}{90} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 90\ L/m^2$$

Como a área de captação é de 0,5 m^2 fazemos uma segunda regra de três:

Área (m^2)		**L/m^2**
0,5	—	y
1	—	90

Calculando y:

$$\frac{0,5}{1} = \frac{y}{90} \Rightarrow y = 45\ L/m^2$$

Calculando agora o volume:

$$45 = 3 \cdot 1^2 \cdot h \Rightarrow h = 15 \text{ dm}$$

Observação: 1 dm^3 equivale a 1 litro.

Opção A

Questão 30

Num experimento para a determinação do número de partículas emitidas pelo radônio, foi utilizada uma amostra contendo 0,1 mg desse radioisótopo. No primeiro dia do experimento, foram emitidas $4{,}3 \times 10^{16}$ partículas.
Sabe-se que a emissão de um dia é sempre 16% menor que a do dia anterior.
O número total de partículas que essa amostra emite, a partir do primeiro dia do experimento, é aproximadamente igual a:

(A) $4{,}2 \times 10^{18}$ (B) $2{,}6 \times 10^{18}$ (C) $4{,}3 \times 10^{17}$ (D) $2{,}7 \times 10^{17}$

Solução:
O problema trata de uma progressão geométrica de razão 0,84 (diminuição de 16%). Queremos descobrir o limite desta soma de infinitos termos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{4,3 \cdot 10^{16}}{1-0,84} \Rightarrow S = \frac{4,3 \cdot 10^{16}}{0,16}$$

$$S = 26,875 \cdot 10^{16} \Rightarrow S = 2,7 \cdot 10^{17} \text{ partículas}$$

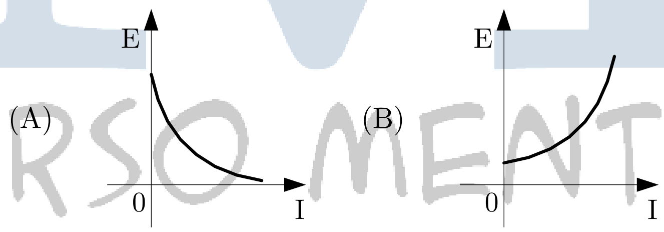
Opção D

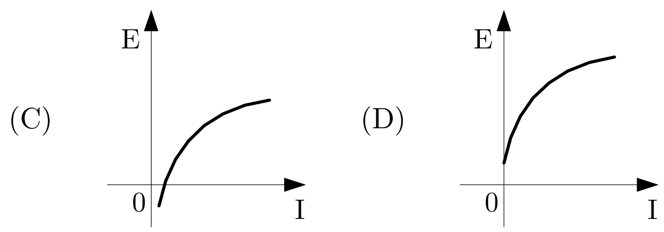
Questão 36

A intensidade I de um terremoto, medida pela escala Richter, é definida pela equação abaixo, na qual E representa a energia liberada em kWh.

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

O gráfico que melhor representa a energia E, em função da intensidade I, sendo E_0 igual a 10^{-3} kWh, está indicado em:





Solução:
Queremos saber a função inversa, ou seja, temos I em função de E e queremos E em função de I:
Da equação dada:

$$I = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow \frac{3I}{2} = \log_{10}\left(\frac{E}{E_0}\right) \Rightarrow 10^{\frac{3I}{2}} = \frac{E}{E_0}$$

Então:

$$E = E_0 \cdot 10^{\frac{3I}{2}}$$

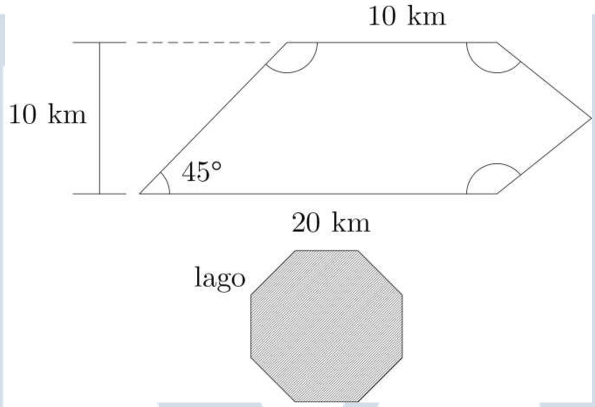
Como $E_0 > 0$ e a base da potência é maior do que 1 temos uma função exponencial crescente.

Opção B

UTILIZE AS INFORMAÇÕES ABAIXO PARA RESPONDER ÀS QUESTÕES DE NÚMEROS 37 A 40.

— Uma área agrícola, próxima a um lago, precisa ser adubada antes do início do plantio de hortaliças.

— O esquema abaixo indica as medidas do terreno a ser plantado. Os dois lados paralelos distam 10 km e os três ângulos obtusos indicados são congruentes.



— Para corrigir a elevada acidez do solo, o produto recomendado foi o calcário $(CaCO_3)$, na dosagem de 5 g/m^2 de solo.

— Para a adubação do terreno, emprega-se um pulverizador com 40 m de comprimento, abastecido por um reservatório de volume igual a 2,16 m^3, que libera o adubo à vazão constante de 1.200 cm^3/s. Esse conjunto, rebocado por um trator que se desloca à velocidade constante de 1 m/s, está representado na figura abaixo.

www.copercampos.com.br

— A partir do início da adubação, a qualidade da água do lago passou a ser avaliada com regularidade.

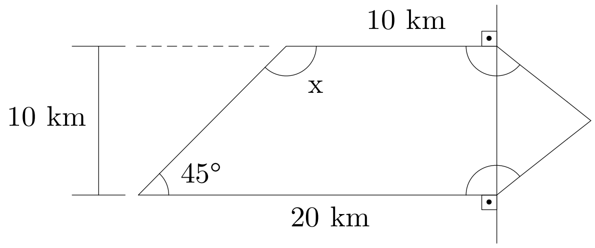
Questão 37

A área do terreno a ser plantada é, em km, igual a:

(A) 160 (B) 165 (C) 170 (D) 175

Solução:

Primeiramente vamos traçar uma perpendicular às paralelas passando pelos dois ângulos obtusos congruentes:



Podemos descobrir agora quanto vale o ângulo x:

$$45° + x + 90° + 90° = 360°$$
$$x = 135°$$

A soma dos ângulos internos de um pentágono vale:

$$S_i = 180°(n - 2)$$
$$S_i = 180°(5 - 2) \Rightarrow S_i = 540°$$

Podemos, então, descobrir o ângulo que falta:

$$45° + 135° + 135° + 135° + y = 540°$$
$$y = 540° - 450°$$
$$y = 90°$$

Então o triângulo formado é retângulo e isósceles. A área total é a soma do trapézio com este triêngulo:

$$S = \frac{(10 + 20) \cdot 10}{2} + \frac{10 \cdot 5}{2}$$
$$S = \frac{30 \cdot 10}{2} + \frac{10 \cdot 5}{2}$$
$$S = \frac{300 + 50}{2}$$
$$S = 175 \text{ km}^2$$

Opção D

Questão 39

Considere o reservatório do pulverizador completamente cheio de adubo.

A área máxima, em m^2, que o trator pode pulverizar com todo esse adubo, é aproximadamente igual a:

(A) 18.000 (B) 60.000 (C) 72.000 (D) 90.000

Solução:

Para determinar a área máxima pulverizada, devemos descobrir quanto tempo demora para acabar o adubo com a vazão dada:

$$t = \frac{2,16 \times 1000000 \text{ cm}^3}{1200 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}}$$
$$t = \frac{216 \times 100}{12} \Rightarrow t = 1800 \text{ s}$$

Como a velocidade de deslocamento é de 1 m/s teremos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \Rightarrow \Delta s = 1 \cdot 1800 \Rightarrow \Delta s = 1800 \text{ m}$$

Como a máquina tem 40 m de largura a área coberta é de:

$$S_{coberta} = 40 \cdot 1800 \Rightarrow S_{coberta} = 72000 \text{ m}^2$$

Opção C

Curso Mentor

Vestibular 2004/2005

1º Exame de Qualificação 2004/2005

Questão 34

Numa operação de salvamento marítimo, foi lançado um foguete sinalizador que permaneceu aceso durante toda sua trajetória. Considere que a altura h, em metros, alcançada por este foguete, em relação ao nível do mar, é descrita por $h = 10 + 5t - t^2$, em que t é o tempo, em segundos, após seu lançamento. A luz emitida pelo foguete é útil apenas a partir de 14 m acima do nível do mar.
O intervalo de tempo, em segundos, no qual o foguete emite luz útil é igual a:

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

Solução:
Basta encontrarmos os valores para os quais

$$10 + 5t - t^2 \geq 14$$
$$-t^2 + 5t - 4 \geq 0$$

Calculando as raízes:

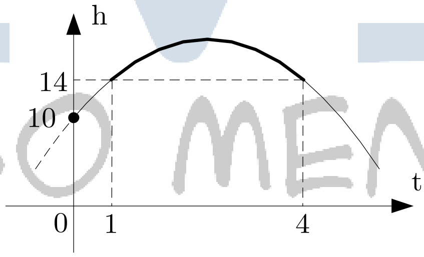
$$\Delta = 25 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)$$
$$\Delta = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+3}{-2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{-2}{-2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-5-3}{-2} \Rightarrow x_2 = \dfrac{-8}{-2} \Rightarrow x_2 = 4 \end{cases}$$

Sabemos que função quadrática tem sinal contrário ao do coeficiente **a** (**a** neste caso é negativo) entre as raízes logo:

$$h \geq 14 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4$$

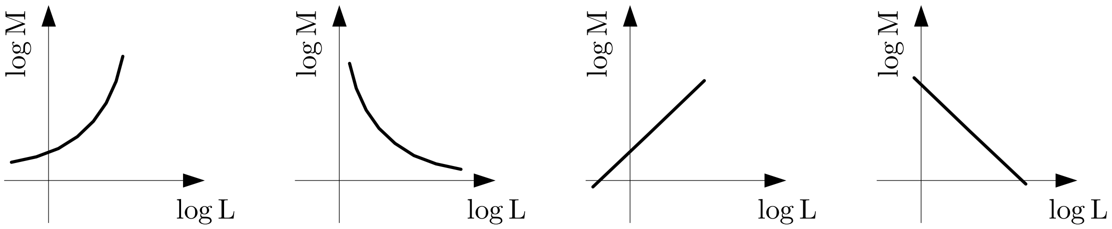
O intervalo é, portanto, de 3 segundos.
Uma análise gráfica talvez esclareça bem esta solução puramente analítica:



Opção A

Questão 35

Um pesquisador, interessado em estudar uma determinada espécie de cobras, verificou que, numa amostra de trezentas cobras, suas massas M, em gramas, eram proporcionais ao cubo de seus comprimentos L, em metros, ou seja, $M = a \times L^3$, em que **a** é uma constante positiva.
Observe os gráficos abaixo.



I **II** **III** **IV**

Aquele que melhor representa log M em função de log L é o indicado pelo número:

(A) I (B) II (C) III (D) IV

Solução:

O que ocorre nesta questão é o que chamamos de **linearização**, que é basicamente transformar uma função não linear em uma representada por uma reta por meio de um processo algébrico. Como todos os gráficos exibem em seus eixos variáveis contendo logaritmos vamos aplicar logaritmo em ambos os lados da equação dada:

$$\log(\mathrm{M}) = \log\left(\mathrm{a} \times \mathrm{L}^3\right)$$

Aplicando as propriedades de logaritmos:

$$\log(\mathrm{M}) = \log \mathrm{a} + \log\left(\mathrm{L}^3\right)$$

$$\log \mathrm{M} = \log \mathrm{a} + 3\log \mathrm{L}$$

Repare que fazendo:

$$\begin{cases} \log \mathrm{M} = \mathrm{y} \\ \log \mathrm{L} = \mathrm{x} \\ \log \mathrm{a} = k \end{cases}$$

Onde k é uma constante. Teremos a seguinte expressão:

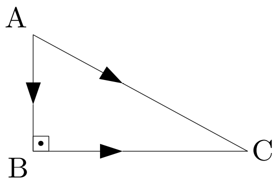
$$\mathrm{y} = k + 3\mathrm{x}$$

Este é o grafico de uma reta crescente passando pelo ponto $(0, k)$. Ou seja, o que mais se parece com **III**.

Opção C

Questão 42

Dois atletas partem simultaneamente do ponto A, com movimento uniforme, e chegam ao mesmo tempo ao ponto C. Um deles segue a trajetória AC, com velocidade v_1 km/h, e o outro segue a trajetória ABC, com velocidade v_2 km/h, conforme ilustra a figura abaixo.



Sendo a e c, respectivamente, as medidas, em quilômetros, dos catetos $\overline{\mathrm{BC}}$ e $\overline{\mathrm{BA}}$, podemos afirmar que $\frac{\mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2}$ corresponde a:

(A) $\dfrac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2}{\sqrt{\mathrm{a} + \mathrm{c}}}$ (B) $\dfrac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2}{\sqrt{\mathrm{a}} + \sqrt{\mathrm{c}}}$ (C) $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a} + \mathrm{c}}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2}}$ (D) $\dfrac{\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2}}{\mathrm{a} + \mathrm{c}}$

Solução:

Como o triângulo é retângulo em B podemos calcular $\overline{AC}$:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2}$$

Sabemos que:

$$\begin{cases} v_1 = \dfrac{\overline{AC}}{\Delta t} \\ v_2 = \dfrac{a+c}{\Delta t} \end{cases}$$

Calculando $\frac{v_1}{v_2}$:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{\overline{AC}}{\Delta t}}{\frac{a+c}{\Delta t}} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\overline{AC}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{a+c} \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{a+c}$$

Opção D

Vestibular 2003/2004

1º Exame de Qualificação 2003/2004

Questão 25

Na tirinha abaixo, considere A_1 a área inscrita na circunferência que representa o acelerador americano e A_2 a área inscrita naquela que representa o suíço.

Observe que A_1 é menor do que A_2.

(Adaptado de CARUSO, F. & DAOU, L. *Tirinhas de física*, vol. 6. Rio de Janeiro, 2002.)

De acordo com os dados da tirinha, a razão $\frac{A_1}{A_2}$ corresponde, aproximadamente, a:

(A) 0,167 (B) 0,060 (C) 0,046 (D) 0,023

Solução:

Seja d o diâmetro do Maracanã, então:

$$\text{Área U.S.A.: } A_1 = \pi\left(\frac{6d}{2}\right)^2$$

$$\text{Área CERN: } A_2 = \pi\left(\frac{28d}{2}\right)^2$$

Então:

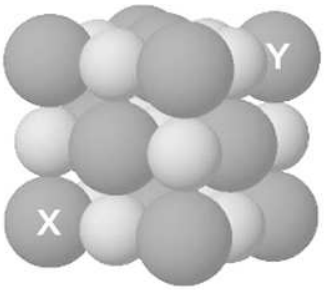
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi\left(\frac{6d}{2}\right)^2}{\pi\left(\frac{28d}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{36\left(\frac{d}{2}\right)^2}{16\times 49\left(\frac{d}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{9}{4\times 49}$$

$$\frac{A_1}{A_2} \cong \frac{4,5}{10} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \cong 0,045$$

Opção C

Questão 28

As esferas da figura abaixo representam os íons formadores de um cristal de cloreto de sódio.



Considere que o íon com maior número de camadas eletrônicas é representado pela esfera de maior raio e que a distância entre os núcleos dos íons X e Y vale $10\sqrt{3}$ unidades de comprimento. O símbolo do elemento formador do íon de menor tamanho e a menor distância, na mesma unidade de comprimento, entre o núcleo de um cátion e o núcleo de um ânion, são:

(A) C*l*, $\sqrt{3}$ (B) Na, $\sqrt{3}$ (C) C*l*, 5 (D) Na, 5

Solução:

O maior átomo (**X**) é o de Cloro que tem número atômico 17 e sua distribuição vai até a quarta camada. A figura mostrada é um cubo, pois **todas as arestas são iguais**. Basta observar que cada uma é composta de X_2Y. A diagonal de um cubo de aresta **a** mede $d = a\sqrt{3}$, então:

$$a\sqrt{3} = 10\sqrt{3} \Rightarrow a = 10$$

Como o núcleo do átomo central é ponto médio da aresta, teremos $\frac{a}{2} = 5$.

Opção C

Questão 29

Seja β a altura de um som, medida em decibéis. Essa altura β está relacionada com a intensidade do som, **I**, pela expressão abaixo, na qual a intensidade padrão, I_0, é igual a $10^{-12}\ W/m^2$.

$$\boxed{\beta = 10\times\log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

Observe a tabela a seguir. Nela, os valores de **I** foram aferidos a distâncias idênticas das respectivas fontes de som.

Fonte de som	I (W/m^2)
Turbina	$1,0 \times 10^2$
Amplificador de Som	1,0
Triturador de lixo	$1,0 \times 10^{-4}$
TV	$3,2 \times 10^{-5}$

Sabendo que há risco de danos ao ouvido médio a partir de 90 dB, o número de fontes da tabela cuja intensidade de emissão de sons está na faixa de risco é de:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Solução:
Vamos calcular a intensidade de cada fonte de som dada:

$$\beta = 10 \times \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

Turbina:

$$\beta = 10 \times \log\left(\frac{1 \times 10^2}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \log 10^{14} \Rightarrow \beta = 10 \times 14 = 140 \text{ dB}$$

Amplificador de Som:

$$\beta = 10 \times \log\left(\frac{1}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \log 10^{12} \Rightarrow \beta = 10 \times 12 = 120 \text{ dB}$$

Triturador:

$$\beta = 10 \times \log\left(\frac{1 \times 10^{-4}}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \log 10^{8} \Rightarrow \beta = 10 \times 8 = 80 \text{ dB}$$

TV:

$$\beta = 10 \times \log\left(\frac{3,2 \times 10^{-5}}{10^{-12}}\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \log\left(3,2 \times 10^{7}\right)$$

$$\beta = 10 \times \left(\log 3,2 + \log 10^7\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \left(\log \frac{32}{10} + 7 \log 10\right)$$

$$\beta = 10 \times \left(\log \frac{32}{10} + 7 \log 10\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \left(\log 2^5 - \log 10 + 7\right)$$

$$\beta = 10 \times \left(\log 2^5 + 6\right) \Rightarrow \beta = 10 \times \left(5 \log 2 + 6\right) \Rightarrow \beta = 50 \log 2 + 60$$

Como $\log 2 = 0,301$ teremos:

$$\beta \cong 50 \times 0,301 + 60 \Rightarrow \beta \cong 15,05 + 60 \Rightarrow \beta \cong 75,05$$

Observação: Vamos supor que você não soubesse o valor de $\log 2$. Sabemos que $\sqrt{10} \cong 3,16$, portanto $10^{\frac{1}{2}} \cong 3,16$. Daí:

$$\log 3,16 = \frac{1}{2}$$

Como $y = \log x$ é função crescente temos:

$$\log 3,16 > \log 2 \Rightarrow \log 2 < \frac{1}{2}$$

Multiplicando ambos os lados por 50:

$$50 \log 2 < 50 \times \frac{1}{2} \Rightarrow 50 \log 2 < 25$$

Somando 60 de ambos os lados:

$$50\log 2 + 60 < 25 + 60 \Rightarrow 50\log 2 + 60 < 85$$

Opção B

Questão 30

Os intervalos de tempo entre as doses dos medicamentos são calculados para garantir que a concentração plasmática do princípio ativo seja mantida entre um valor mínimo eficaz e um valor máximo seguro.
Para um certo medicamento, o princípio ativo apresenta massa molar de 200 g e sua concentração plasmática reduz-se à metade a cada 8 horas.
O valor mínimo eficaz da concentração plasmática é igual a $1\times10^{-5}\ \text{mol/L}^{-1}$ e seu valor máximo seguro é de $9,5\times10^{-5}\ \text{mol/L}^{-1}$.
A concentração plasmática máxima atingida imediatamente após a ingestão da primeira dose é igual a $16\ \text{mg}\times\text{L}^{-1}$.
Nessas condições, o intervalo de tempo ideal, em horas, entre a ingestão da primeira e da segunda doses é de:

(A) 24 (B) 12 (C) 6 (D) 3

Solução:
Sabemos que a massa de 1 mol mede 200 g daí fazemos a seguinte regra de três:

Nº de mols		**Massa**
1	—	200 g
x	—	16 mg

Teremos:

$$x = \frac{16\times10^{-3}}{200} \Rightarrow x = 8\times10^{-5}\text{mols}$$

Como a concentração sempre se reduz à metade, teremos:

Depois de 1 hora: $x = 4\times10^{-5}\text{mols}$
Depois de 2 horas: $x = 2\times10^{-5}\text{mols}$
Depois de 3 horas: $x = 1\times10^{-5}\text{mols}$
Depois de 4 horas: $x = 0,5\times10^{-5}\text{mols}$

Como, após 4 horas, a concentração estará abaixo do mínimo cada ingestão ocorrerá a cada 3 horas.

Opção D

Questão 32

Uma pesquisa comparou a velocidade de conversão de monoésteres pela fosfatase. Na presença dessa enzima, a conversão de uma certa massa de monoésteres se dá em 10 ms; em sua ausência, usando apenas água como meio reacional, a conversão da mesma massa ocorre em 1 trilhão de anos. Considerando que um ano possui $3,15\times10^{7}\ \text{segundos}$, o número aproximado de vezes em que a reação enzimática é mais rápida do que a ocorrida em meio aquoso equivale a:

(A) 10^{19} (B) 10^{21} (C) 10^{23} (D)10^{25}

Solução:
Vamos calcular quantos segundos tem 1 trilhão de anos:

$$t = 3,15\times10^{7}\times1000000000000 = 3,15\times10^{7}\times10^{12} = 3,15\times10^{19}\ \text{s}$$

Com enzimas:

$$t_e = 10 \times 10^{-3} = 10^{-2} \text{ s}$$

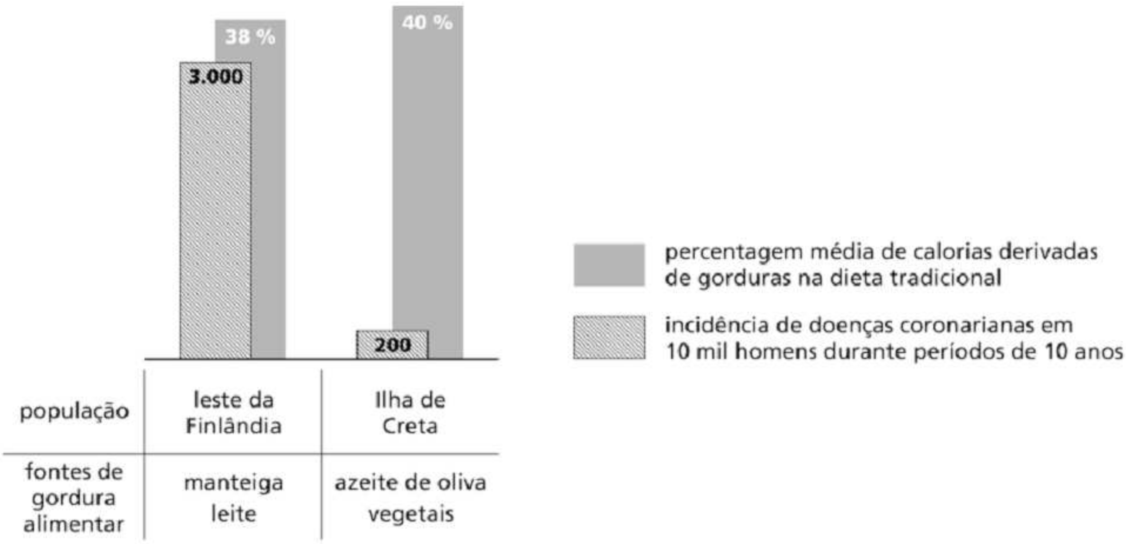
Fazendo $\frac{t}{t_e}$:

$$\frac{t}{t_e} = \frac{3,15 \times 10^{-19}}{10^{-2}} = 3,15 \times 10^{-21}$$

Opção B

Questão 39

Algumas controvérsias ainda existem quanto à relação entre a presença de gorduras na dieta alimentar e a incidência de doenças cardíacas. O gráfico abaixo mostra resultados de uma pesquisa recente, na qual estes fatores foram comparados em duas populações com dietas tradicionalmente diferentes.



Considere os valores calóricos médios abaixo, em kcal/g, para os seguintes componentes de uma dieta:

- carboidratos = 4,0
- proteínas = 4,0
- gorduras = 8,0

Sabe-se que o consumo diário de carboidratos, em ambas as populações, é o dobro do consumo de proteínas.

Na dieta que apresenta maior efeito protetor contra doenças cardíacas, a percentagem média, em massa de gordura ingerida, é de:

(A) 25% (B) 35% (C) 40% (D) 50%

Solução:

Vamos imaginar que a pessoa ingira ***m*** gramas de um determinado alimento. De acordo com o gráfico teremos **40%** kcal de gordura (na dieta menos perigosa). Daí:

$$m \text{ g} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{100} \times m \text{ de gorduras} \\ \dfrac{2}{3} \times \dfrac{(100 - x)}{100} \times m \text{ de carboidratos} \\ \dfrac{1}{3} \times \dfrac{(100 - x)}{100} \times m \text{ de proteínas} \end{cases}$$

Vamos calcular com quantas calorias (kcal) cada parte contribui:

$$\text{Gorduras: } \frac{x \cdot m}{100} \cdot 8 \text{ kcal / g} = \frac{8mx}{100} \text{ kcal}$$

$$\text{Carboidratos: } \frac{2m\left(100 - x\right)}{300} \cdot 4 \text{ kcal / g} = \frac{8m\left(100 - x\right)}{300} \text{ kcal}$$

$$\text{Proteínas: } \frac{1m\left(100 - x\right)}{300} \cdot 4 \text{ kcal / g} = \frac{4m\left(100 - x\right)}{300} \text{ kcal}$$

Como vimos do gráfico, sabemos que a parte de gordura corresponde a 40 % de calorias consumidas:

$$\frac{8mx}{100} = \frac{40}{100} \Rightarrow x = \frac{40}{8m} \Rightarrow x = \frac{5}{m}$$

Somando carboidratos e proteínas teremos 60%:

$$\frac{8m\left(100 - x\right)}{300} + \frac{4m\left(100 - x\right)}{300} = \frac{60}{100}$$

$$\frac{800m - 8mx + 400m - 4mx}{300} = \frac{60}{100}$$

$$\frac{1200m - 12mx}{3} = \frac{60}{1} \Rightarrow 1200m - 12mx = 180$$

Substituindo $x = \dfrac{5}{m}$:

$$1200m - 12m\left(\frac{5}{m}\right) = 18$$

$$1200m - 60 = 180 \Rightarrow m = \frac{240}{1200} \Rightarrow m = \frac{1}{5}$$

Voltando ao x:

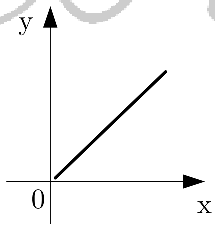
$$x = \frac{5}{m} \Rightarrow x = \frac{5}{\frac{1}{5}} \Rightarrow x = 25$$

Opção A

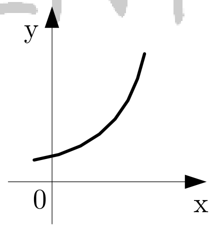
Questão 42

A relação entre as coordenadas x e y de um corpo em movimento no plano é dada por $y = 10^{\log x}$. O gráfico correspondente a esta relação é:

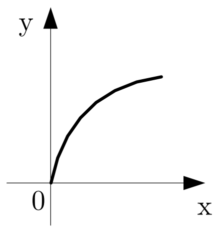
(A)



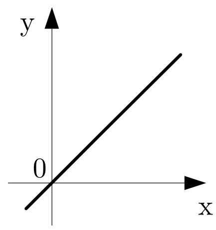
(B)



(C)



(D)



Solução:
Usando a propriedade dos logaritmos:
$$a^{\log_a b} = b$$
Temos:
$$y = 10^{\log x} \Rightarrow y = x$$
Mas, devemos lembrar que o domínio da função é $D_f = \mathbb{R}_+$. O gráfico é uma semirreta partindo da origem e que não a contém.

Opção A

Questão 44

Um litro de combustível para aviões a jato tem massa igual a 1,8 libras, medida no sistema inglês de unidades. A mesma massa, no sistema internacional de unidades, equivale a 810 g.
Suponha que o tanque de um determinado tipo de avião, quando cheio, contém 900 kg de combustível.
Despreze possíveis influências de temperatura e de pressão.
Se, por um engano, a massa de 900 kg de combustível for medida em uma balança calibrada em libras, podemos afirmar que a percentagem preenchida do tanque desse avião será de:

(A) 9% (B) 45% (C) 50% (D) 90%

Solução:
Sabemos que **1** litro de combustível corresponde a **810** g, daí sabemos que:

litros		**massa**
1	—	810 g
x	—	900000 g

Daí teremos:
$$\frac{1}{x} = \frac{810}{900000} \Rightarrow x = \frac{90000}{81} \Rightarrow x = \frac{10000}{9} \text{ litros}$$
Sabemos que **1** litro de combustível corresponde a **1,8** libras, daí sabemos que:

litros		**massa**
1	—	1,8 libras
y	—	900 libras

Daí teremos:
$$\frac{1}{y} = \frac{1,8}{900} \Rightarrow y = \frac{900}{1,8} \Rightarrow y = \frac{9000}{18} \Rightarrow y = \frac{1000}{2} \text{ litros}$$
Sabemos que x é a capacidade do tanque, portanto:
$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{1000}{2}}{\frac{10000}{9}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1000}{2} \cdot \frac{9}{10000} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} \Rightarrow \frac{y}{x} = 0,45 = 45\%$$

Opção B

Questão 46

Ao comprar uma barra de ouro, com 2 kg de massa, um investidor desconfiou haver também prata em sua composição. Para certificar-se, mergulhou a barra em um recipiente contendo água e verificou que o deslocamento da água correspondeu a um volume de 140 cm^3. Sabendo que as massas específicas do ouro e da prata são, respectivamente, $20 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$ e $10 \text{ g} \times \text{cm}^{-3}$, o investidor pode concluir que há, na barra, uma massa em prata equivalente, em gramas, a:

(A) 600 (B) 800 (C) 1000 (D) 1200

Solução:

A massa total da barra de ouro é a soma das massas de ouro e prata:

$$m = m_{ouro} + m_{prata}$$

Como a barra é maciça, massa específica e densidade têm o mesmo valor e sabemos que:

$$\text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Daí:

$$m = d_{ouro} \cdot V_{ouro} + d_{prata} \cdot V_{prata}$$

$$2000 = 20 \cdot V_{ouro} + 10 \cdot V_{prata} \Rightarrow 200 = 2 \cdot V_{ouro} + V_{prata}$$

O volume total da barra de ouro é a soma dos volumes de ouro e prata:

$$V = V_{ouro} + V_{prata}$$

Daí:

$$\begin{cases} 140 = V_{ouro} + V_{prata} \\ 200 = 2 \cdot V_{ouro} + V_{prata} \end{cases}$$

Subtraindo a segunda da primeira:

$$200 - 140 = 2 \cdot V_{ouro} - V_{ouro} + V_{prata} - V_{prata}$$

$$V_{ouro} = 60 \text{ cm}^3$$

$$60 + V_{prata} = 140 \Rightarrow V_{prata} = 80 \text{ cm}^3$$

Calculando a massa:

$$\frac{m_{prata}}{d_{prata}} = 80 \text{ cm}^3 \Rightarrow m_{prata} = 80 \cdot 10 \Rightarrow m_{prata} = 800 \text{ g}$$

Opção B

Vestibular 2002/2003

1º Exame de Qualificação 2002/2003

Questão 24

Três candidatos, A, B e C, concorrem a um mesmo cargo público de uma determinada comunidade. A tabela abaixo resume o resultado de um levantamento sobre a intenção de voto dos eleitores dessa comunidade.

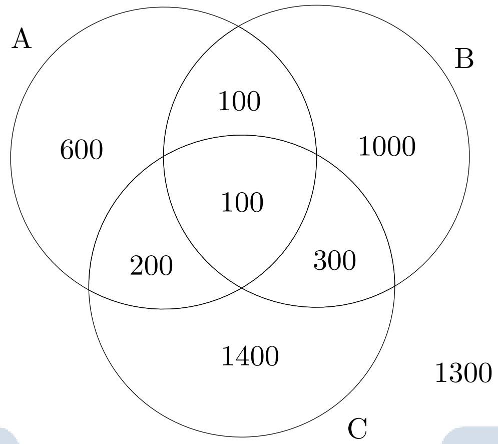
Números de eleitores que votariam em...							
...um único candidato			...dois candidatos			...qualquer um dos candidatos	... nenhum dos candidatos
A	**B**	**C**	**A-B**	**B-C**	**A-C**		
600	1000	1400	100	300	200	100	1300

Pode-se concluir, pelos dados da tabela, que a percentagem de eleitores consultados que não votariam no candidato B é:

(A) 66,0% (B) 70,0% (C) 94,5% (D) 97,2%

Solução:

Podemos elaborar um diagrama de Venn e organizar os dados da tabela inicial com as intenções de voto dos candidatos A, B e C:



Assim queremos saber a relação entre os que não votam em B sobre o total:

$$R = \frac{\text{Não votam em B}}{\text{Total}}$$

$$R = \frac{600 + 200 + 1400 + 1300}{600 + 200 + 1400 + 1300 + 300 + 100 + 100 + 1000}$$

$$R = \frac{3500}{5000} \Rightarrow R = \frac{7}{10} = 70\%$$

Opção B

Questão 25

O logaritmo decimal do número positivo x é representado por log x. Então, a soma das raízes de $\log^2 x - \log x^3 = 0$ é igual a:

(A) 1 (B) 101 (C) 1000 (D) 1001

Solução:
Seja a equação dada:

$$\log^2 x - \log x^3 = 0$$

Aplicando as propriedades de logaritmos teremos:

$$\log^2 x - 3\log x = 0$$

Fazendo $\log x = y$ teremos:

$$y^2 - 3y = 0$$

Então:

$$y(y - 3) = 0$$

$$y = 0 \text{ ou } y = 3$$

Então:

$$\log x = 0 \Rightarrow x = 10^0 \Rightarrow x = 1$$

$$\log x = 3 \Rightarrow x = 10^3 \Rightarrow x = 1000$$

A soma dos valores é, portanto, 1001.

Opção D

Questão 26

"O experimento clássico de Rutherford levou à descoberta do núcleo atômico e abriu um novo capítulo no estudo da Estrutura da Matéria, ao fazer incidir um feixe de partículas sobre um alvo fixo no laboratório. As partículas desviadas eram observadas com detectores de material cintilante. Experimentos desse tipo são ainda realizados hoje em dia."

A experiência de Rutherford mostrou que, ao atravessar uma lâmina delgada de ouro, uma em cada 10^5 partículas alfa é desviada de um ângulo médio superior a 90°.

Considerando que a lâmina de ouro possui 10^3 camadas de átomos e elaborando a hipótese de que este desvio se deve à colisão de partículas alfa com um único núcleo atômico, Rutherford foi capaz de estimar a ordem de grandeza do núcleo.

Se o raio do átomo é da ordem de 10^{-8} cm, o raio do núcleo, em cm, é da ordem de:

(A) 10^{-12} (B) 10^{-10} (C) 10^{-9} (D) 10^{-5}

Solução:

A "chance" de colisão é dada pela relação entre a área do núcleo e a área do átomo. Sendo r_n o raio do núcleo e r_a o raio do átomo teremos para a chance C de colisão:

$$C = \frac{2\pi(r_n)^2}{2\pi(r_a)^2} \cdot 10^3$$

Observação 1: A fração fica multiplicada por 10^3 porque vimos anteriormente que esta é a "largura" da camada de átomos.

Sabemos que uma em cada 10^5 partículas alfa é desviada de um ângulo médio superior a 90° daí:

$$\frac{1}{10^5} = \frac{(r_n)^2}{(r_a)^2} \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{1}{10^5} = \frac{(r_n)^2}{(10^{-8})^2} \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{1}{10^5} = (r_n)^2 \cdot 10^{19} \Rightarrow (r_n)^2 = 10^{-24} \Rightarrow r_n = 10^{-12}$$

Observação 2: Achamos que esta questão não está devidamente clara devido à expressão "10^3 camadas de átomos".

Opção A

Questão 38

Numa cidade, os números telefônicos não podem começar por zero e têm oito algarismos, dos quais os quatro primeiros constituem o prefixo.

Considere que os quatro últimos dígitos de todas as farmácias são 0000 e que o prefixo da farmácia Vivavida é formado pelos dígitos 2, 4, 5 e 6, não repetidos e não necessariamente nesta ordem.

O número máximo de tentativas a serem feitas para identificar o número telefônico completo dessa farmácia equivale a:

(A) 6 (B) 24 (C) 64 (D) 168

Solução:

Queremos preencher os quatro primeiros dígitos e só podemos usar os algarismos 2, 4, 5 e 6; daí temos uma permutação de 4 elementos não repetidos:

$$P_4 = 4! \Rightarrow P_4 = 24$$

Opção B

Questão 39

A reciclagem de latas de alumínio permite uma considerável economia de energia elétrica: a produção de cada lata reciclada gasta apenas 5% da energia que seria necessária para produzir uma lata não-reciclada.

Considere que, de cada três latas produzidas, uma não é obtida por reciclagem, e que a produção de cada lata reciclada consome 1 unidade de energia.
De acordo com essa proporção, o número de unidades de energia necessário para a produção de 24 latas é igual a:

(A) 24 (B) 42 (C) 150 (D) 176

Solução:
Seja R a energia gasta na produção de uma lata reciclada e E a energia gasta para fbricar uma lata não reciclada. Temos então:

$$R = \frac{5}{100} \cdot E \Rightarrow E = \frac{100R}{5} \Rightarrow E = 20R$$

Para a produção de 3 latas:

$$E_{Total} = 2R + E \Rightarrow E_{Total} = 2R + 20R$$
$$E_{Total} = 22R$$

Podemos fazer uma regra de três simples:

Latas		**Energia**
3	—	22R
24	—	E

Em fração:

$$\frac{3}{24} = \frac{22R}{E}$$
$$\frac{1}{8} = \frac{22R}{E} \Rightarrow E = 176 \cdot R$$

Como R corresponde a uma uidade de energia teremos exatamente 176 unidades.

Opção D

Questão 41

Uma sequência de cinco átomos está organizada por ordem crescente de seus números atômicos, cujos valores são regidos por uma progressão aritmética de razão 4. Já o número de nêutrons desses mesmos átomos é regido por uma progressão aritmética de razão 5.
Se o átomo mais pesado pertence ao elemento ferro e o mais leve possui o número de prótons igual ao número de nêutrons, o número de massa do terceiro átomo da série é:

(A) 18 (B) 20 (C) 26 (D) 38

Solução:
Os números atômicos (número de prótons) estão em P.A. de razão 4, logo, podemos representar esta progressão de 5 termos com a seguinte notação:

$$(z - 8, z - 4, z, z + 4, z + 8)$$

Os números de nêutrons estão em P.A. de razão 5, logo, podemos representar esta progressão de 5 termos com a seguinte notação:

$$(n - 10, n - 5, n, n + 5, n + 10)$$

O átomo de maior massa é o ferro cujo número de massa é 56. Usando os dados:

$$z + 8 + n + 10 = 56 \Rightarrow z + n = 38$$

O mais leve tem o número de neutrons igual ao número de prótons, ou seja:

$$z - 8 = n - 10 \Rightarrow z = n - 2$$

Comparando as duas:

$$n - 2 + n = 38 \Rightarrow 2n = 40 \Rightarrow n = 20$$

Portanto:

$$z = 18$$

Teremos as progressões:

$$(10,14,18,22,26) \text{ e } (10,15,20,25,30)$$

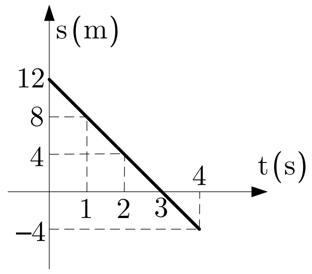
O terceiro terá número de massa:

$$A = 18 + 20 \Rightarrow A = 38$$

Opção D

Questão 42

A função que descreve a dependência temporal da posição S de um ponto material é representada pelo gráfico abaixo.



Sabendo que a equação geral do movimento é do tipo $S = A + Bt + Ct^2$, os valores numéricos das constantes A, B e C são, respectivamente:

(A) 0, 12, 4 (B) 0, 12, -4 (C) 12, 4, 0 (D) 12, -4, 0

Solução:

Embora o gráfico pareça uma reta, devemos encontrar os coeficentes A, B e C e, se isto for verdade, devemos ter $C = 0$.

Como o gráfico corta o eixo das ordenadas em $(0,12)$ temos que $A = 12$. Tomemos agora os pontos $(1,8)$ e $(3,0)$. Teremos o sistema:

$$\begin{cases} 8 = 12 + B + C \\ 0 = 12 + 3B + 9C \end{cases}$$

Multiplicando a primeira por 3 e subtraindo da segunda:

$$24 = 36 - 12 + 3C - 9C$$
$$-6C = 0 \Rightarrow C = 0$$

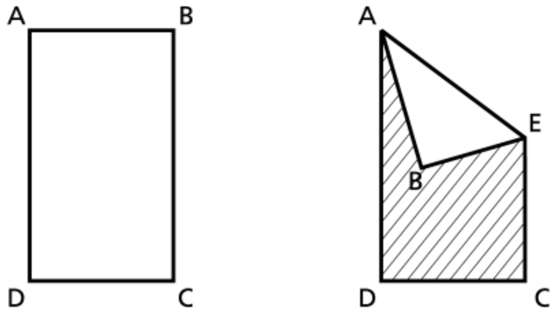
Substituindo na primeira equação:

$$B = -4$$

Opção D

Questão 45

Uma folha de papel retangular, como a da figura 1, de dimensões 8 cm × 14 cm, é dobrada como indicado na figura 2.



Se o comprimento CE é 8 cm, a área do polígono ADCEB, em cm^2, é igual a:

(A) 112 (B) 88 (C) 64 (D) 24

Solução:
Se CE vale 8 cm, como BC vale 14 cm teremos BE igual a 6 cm. O triângulo ABE é retângulo em B, então a área do triângulo vale:

$$\frac{AB \times BE}{2} = \frac{8 \times 6}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

A área do retângulo é:

$$8 \times 14 = 112 \text{ cm}^2$$

A área do polígono dado é:

$$112 - 24 = 88 \text{ cm}^2$$

Opção B

Vestibular 2001/2002

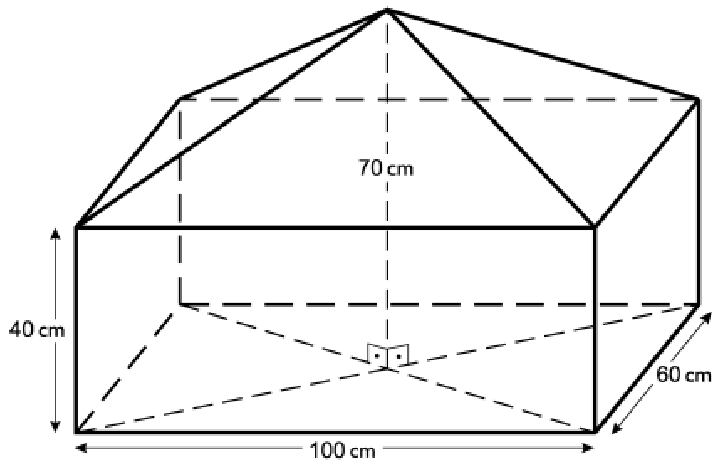
1º Exame de Qualificação

Questão 19

Leia os quadrinhos:

(O Globo, março 2000)

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho-de-mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura abaixo, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.



Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm^3, igual a:

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15

Solução:
O volume do sólido anterior será a soma do volume do paralelepípedo com o volume da pirâmide:

$$V_S = V_{Par} + V_{Pir}$$

$$V_S = S_{Base} \times \text{Altura} + \frac{S_{Base} \times \text{Altura}}{3}$$

$$V_S = 100 \times 60 \times 40 + \frac{100 \times 60 \times 30}{3}$$

$$V_S = 240000 + \frac{100 \times 60 \times 10}{1} \Rightarrow V_S = 240000 + 60000 \Rightarrow V_S = 300000$$

$$V_S = 300000 \text{ cm}^3$$

Passando para dm^3:

$$V_S = 300 \text{ dm}^3$$

Como foram 20 anos, em cada ano, ele acumulou:

$$V_{SMédio} = \frac{300 \text{ dm}^3}{20 \text{ anos}} \Rightarrow V_{SMédio} = 15 \frac{\text{dm}^3}{\text{ano}}$$

Opção D

Questão 29

Considere a informação abaixo:

"Se o papel de escritório consumido a cada ano no mundo fosse empilhado, corresponderia a cinco vezes a distância da Terra à Lua."

Admitindo-se que a distância da Terra à Lua é de 3,8 x 10^5 km e que a espessura média de uma folha de papel é de $1,3 \times 10^{-1}$ mm, a ordem de grandeza do número de folhas de papel de escritório consumido a cada ano é:

(A) 10^9 (B) 10^{11} (C) 10^{13} (D) 10^{15}

Solução:
Para encontrarmos o número de folhas basta vermos quantas vezes a espessura de uma folha de papel "cabe" em 5 vezes a distância da Terra à Lua:

$$n = \frac{5 \times 3,8 \times 10^5 \times 10^6 \ \text{mm}}{1,3 \times 10^{-1} \ \text{mm}}$$

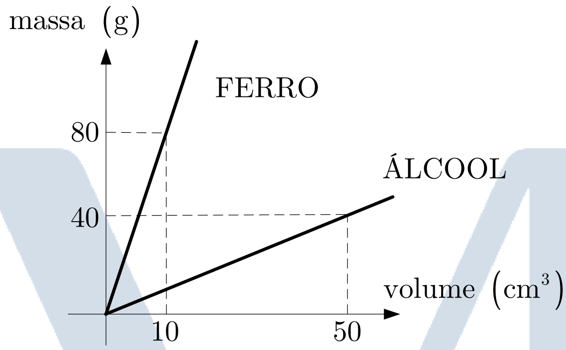
$$n = 5 \times 2,92 \times 10^{12} \Rightarrow n = 1,46 \times 10^{13}$$

Portanto a ordem de grandeza (O.G.) é $\text{O.G.} = 10^{13}$.

Opção C

Questão 33

A razão entre a massa e o volume de uma substância, ou seja, a sua massa específica, depende da temperatura. A seguir, são apresentadas as curvas aproximadas da massa em função do volume para o álcool e para o ferro, ambos à temperatura de 0° C.



Considere ρ_F a massa específica do ferro e ρ_A a massa específica do álcool. De acordo com o gráfico, a razão $\frac{\rho_F}{\rho_A}$ é igual a:

(A) 4 (B) 8 (C) 10 (D) 20

Solução:

Como o gráfico nos dá massa *versus* volume o **coeficiente angular** é a própria massa específica daí:

$$\frac{\rho_F}{\rho_A} = \frac{\frac{80}{10}}{\frac{40}{50}} \Rightarrow \frac{\rho_F}{\rho_A} = \frac{80}{10} \times \frac{50}{40} \Rightarrow \frac{\rho_F}{\rho_A} = 10$$

Opção C

Questão 36

Leia com atenção a história em quadrinhos.

(*O Globo*, 16/03/2001)

Considere que o leão da história acima tenha repetido o convite por várias semanas. Na primeira, convidou a Lana para sair 19 vezes; na segunda semana, convidou 23 vezes; na terceira, 27 vezes e assim sucessivamente, sempre aumentando em 4 unidades o número de convites feitos na semana anterior.
Imediatamente após ter sido feito o último dos 492 convites, o número de semanas já decorridas desde o primeiro convite era igual a:

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 16

Solução:
Como o número de convites aumenta sempre 4 unidades temos uma progressão aritmética:

$$(19, 23, 27, 31, 35, \ldots)$$

Queremos a soma de n elementos de modo que o total seja de 492 convites:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2}$$

$$492 = \frac{(19 + a_n)\cdot n}{2}$$

Da fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 19 + (n-1)\cdot 4$$

$$a_n = 19 + 4n - 4 \Rightarrow a_n = 4n + 15$$

Daí:

$$492 = \frac{(19 + 4n + 15)\cdot n}{2} \Rightarrow 984 = 4n^2 + 34n \Rightarrow 4n^2 + 34n - 984 = 0$$

Então:

$$\Delta = 34^2 - 4\cdot 4\cdot(-984)$$

$$\Delta = 1156 + 15744$$

$$\Delta = 16900$$

$$n_{1,2} = \frac{-34 \pm \sqrt{16900}}{2\cdot 4} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = \dfrac{-34+130}{8} \Rightarrow n_1 = \dfrac{96}{8} \Rightarrow n_1 = 12 \\ n_2 = \dfrac{-34-130}{8} \Rightarrow n_2 = \dfrac{-164}{8} \Rightarrow n_2 = -21 \end{cases}$$

Como n é o número de termos devemos ter $n > 0$. Logo $n = 12$.

Opção B

Questão 38

Rafael comprou quatro passagens aéreas para dar uma de presente para cada um de seus quatro netos. Para definir a época em que irão viajar, Rafael pediu para cada um dizer uma frase. Se a frase fosse verdadeira, o neto viajaria imediatamente; se fosse falsa, o neto só viajaria no final do ano.

O quadro abaixo apresenta as frases que cada neto falou:

NETO	FRASE
I	Viajarei para a Europa.
II	Meu voo será noturno.
III	Viajarei no final do ano.
IV	O Flamengo é o melhor time do Brasil.

A partir das frases ditas, Rafael não pôde definir a época da viagem do neto representado pelo seguinte número:

(A) I (B) II (C) III (D) IV

Solução:
A frase **III** causa um paradoxo:

"Viajarei no final do ano."

Se esta frase for **verdadeira** o neto viaja imediatamente, ou seja, torna a frase **falsa**. Se, por outro lado, a frase for **falsa** o neto viajaria no fim do ano, tornando a sentença dele **verdadeira** e causando uma contradição.
Outro exemplo deste tipo de frase é:

"Eu estou mentindo."

Opção C

Questão 41

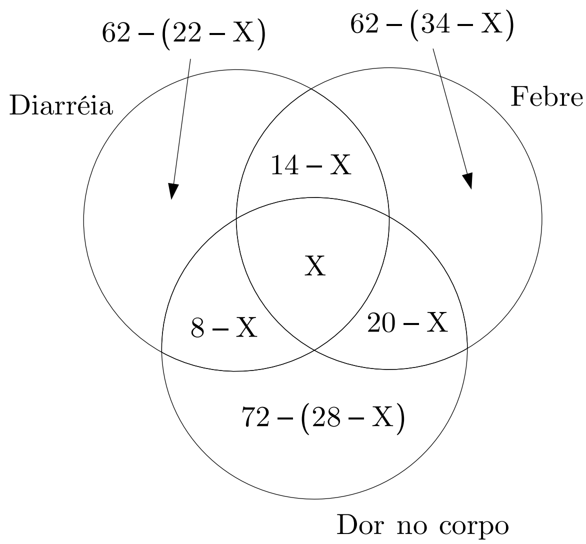
Em um posto de saúde foram atendidas, em determinado dia, 160 pessoas com a mesma doença, apresentando, pelo menos, os sintomas diarréia, febre ou dor no corpo, isoladamente ou não.
A partir dos dados registrados nas fichas de atendimento dessas pessoas, foi elaborada a tabela abaixo.

SINTOMAS	FREQUÊNCIA
Diarréia	62
Febre	62
Dor no corpo	72
Diarréia e febre	14
Diarréia e dor no corpo	08
Febre e dor no corpo	20
Diarréia, febre e dor no corpo	**X**

Na tabela, **X** corresponde ao número de pessoas que apresentaram, ao mesmo tempo, os três sintomas.
Pode-se concluir que **X** é igual a:

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12

Solução:
O problema em questão envolve a teoria de conjuntos e podemos elaborar o seguinte diagrama de Venn a partir dos dados da tabela dada:



Somando todos os valores teremos o total de pessoas envolvidas, já que não há pessoas sem sintomas. Então:

$$X + 8 - X + 20 - X + 14 - X + 40 + X + 28 + X + 44 + X = 160$$

$$70 + 84 + X = 160 \Rightarrow X = 6$$

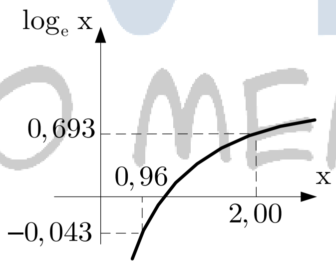
Opção A

Vestibular 2000/2001

1º Exame de Qualificação

Questão 39

Meia-vida ou período de semidesintegração de um isótopo radioativo é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade.



A meia-vida de um isótopo radioativo pode ser calculada utilizando-se equações do tipo $A = C \cdot e^{kt}$, em que:

C é a massa inicial;

A é a massa existente em **t** anos;

k é uma constante associada ao isótopo radioativo.

Em um laboratório, existem 60 mg de ^{226}Ra, cujo período de semidesintegração é de 1600 anos. Daqui a 100 anos restará, da quantidade original desse isótopo, o correspondente, em mg, a:

(A) 40,2 (B) 42,6 (C) 50,2 (D) 57,6

Solução:

Usando a equação dada, podemos substituir as informações do enunciado. Em 1600 anos a massa do ^{226}Ra será a metade da inicial, então:

$$A = C \cdot e^{kt}$$
$$30 = 60 \cdot e^{k \cdot 1600}$$

Aplicando logaritmo na base **e** em ambos os lados:

$$\ln\left(\frac{30}{60}\right) = \ln\left(e^{k \cdot 1600}\right)$$
$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = k \cdot 1600 \ln(e)$$
$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{1600}$$

Para achar o valor de k precisamos do valor de $\ln\left(\frac{1}{2}\right)$. Do gráfico inicial temos o valor de $\ln 2 = 0,693$. Das propriedades de logaritmos sabemos que:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)^{-1} = -\ln 2$$

Então:

$$k = \frac{-0,693}{1600}$$

Queremos $t = 100$ anos:

$$A(t) = C \cdot e^{kt} \Rightarrow A(100) = 60 \cdot e^{\frac{-0,693}{1600} \cdot 100} \Rightarrow A(100) = 60 \cdot e^{\frac{-0,693}{16}}$$

$$A(100) = 60 \cdot e^{-0,043}$$

Para calcular $e^{-0,043}$ vamos mais uma vez recorrer ao gráfico. Veja que o gráfico dado é o da função:

$$f(x) = \ln x$$

Substituindo o ponto $(0,96; -0,0043)$:

$$-0,043 = \ln 0,96$$

Aplicando a definição de logaritmo:

$$-0,043 = \ln 0,96 \Rightarrow e^{-0,043} = 0,96$$

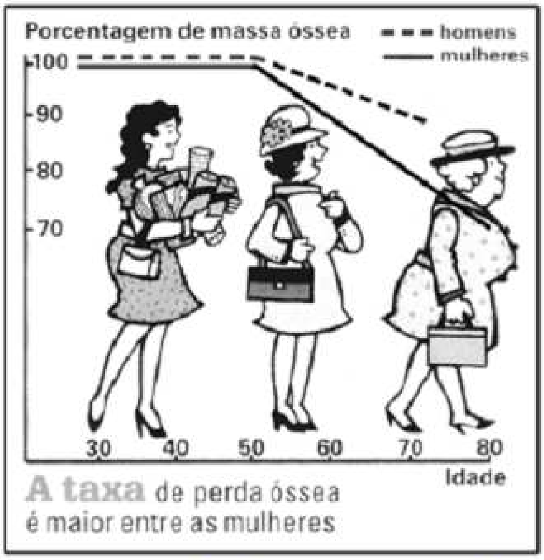
Voltando ao nosso problema:

$$A(100) = 60 \cdot 0,96 \Rightarrow A(100) = 57,6 \text{ g}$$

Opção D

Questão 44

Admita que, a partir dos cinqüenta anos, a perda da massa óssea ocorra de forma linear, conforme mostra o gráfico abaixo.



(Adaptado de *Galileu*, janeiro de 1999)

Aos 60 e aos 80 anos, as mulheres têm, respectivamente, 90% e 70% da massa óssea que tinham aos 30 anos.
O percentual de massa óssea que as mulheres já perderam aos 76 anos, em relação à massa aos 30 anos, é igual a:

(A) 14 (B) 18 (C) 22 (D) 26

Solução:
De acordo com o gráfico, o decréscimo da massa óssea é linear. Ou seja, entre 60 e 80 ano temos uma reta decrescente:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(60) = 60a + b \Rightarrow 60a + b = 90$$
$$f(80) = 80a + b \Rightarrow 80a + b = 70$$

Subtraindo a segunda da primeira equação:

$$20a = -20 \Rightarrow a = -1$$

Calculando b:

$$60 \cdot (-1) + b = 90 \Rightarrow -60 + b = 90 \Rightarrow b = 150$$

Temos, portanto, a seguinte função:

$$f(x) = -x + 150$$

Queremos $f(76)$:

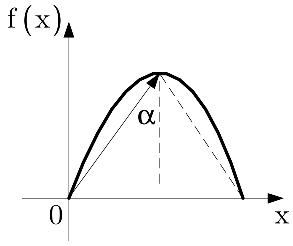
$$f(76) = -76 + 150 \Rightarrow f(76) = 74$$

Ou seja, ocorreu uma diminuição de 26%.

Opção D

Questão 47

A figura abaixo mostra um anteparo parabólico que é representado pela função $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 2\sqrt{3}x$.



Uma bolinha de aço é lançada da origem e segue uma trajetória retilínea. Ao incidir no vértice do anteparo é refletida e a nova trajetória é simétrica à inicial, em relação ao eixo da parábola.
O valor do ângulo de incidência α corresponde a:

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

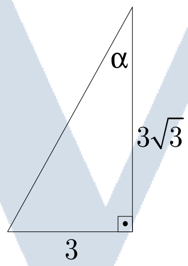
Solução:
O primeiro passo é achar as coordenadas do vértice da parábola:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{2\sqrt{3}}{2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)} \Rightarrow x_v = 3$$

Substituindo na expressão achamos y_v:

$$y_v = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3^2 + 2\sqrt{3}\cdot 3 \Rightarrow y_v = -3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} \Rightarrow y_v = 3\sqrt{3}$$

Temos então o seguinte triângulo:



Calculando a $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{3\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Sabemos então que $\alpha = 30°$.

Opção A

Questão 51

Os 4,5 bilhões de anos de existência da Terra podem ser reduzidos a apenas 1 ano, adotando-se a seguinte escala:

$$\boxed{1\text{ minuto} = 9\cdot 10^3\text{ anos}}$$

Desse modo, se o aparecimento dos primeiros mamíferos se deu em 16 de dezembro, os primeiros primatas surgem em 25 de dezembro.
Utilizando-se a escala, a ordem de grandeza, em séculos, entre estas duas datas é igual a:

(A) 10^8 (B) 10^6 (C) 10^4 (D) 10^2

Solução:
Primeiro encontramos quantos dias há entre 25 e 16 de dezembro:

$$25 - 16 = 9\text{ dias}$$

Agora passamos este tempo para minutos:

$$9 \text{ dias} = 9 \times 24 \times 60 = 12960 \text{ minutos}$$

Agora uma regra de três usando a escala dada:

$$\begin{array}{ccc} 1 \text{ minuto} & — & 9 \cdot 10^3 \text{ anos} \\ 12960 \text{ minutos} & — & x \end{array}$$

Colocando em frações:

$$\frac{1}{12960} = \frac{9 \cdot 10^3}{x} \Rightarrow x = 9 \cdot 12960 \cdot 10^3 \text{ anos}$$

Basta dividir por 100 para colocarmos a unidade em séculos:

$$x = \frac{9 \cdot 12960 \cdot 10^3}{100} \text{ anos} \Rightarrow x = 9 \cdot 12960 \cdot 10$$

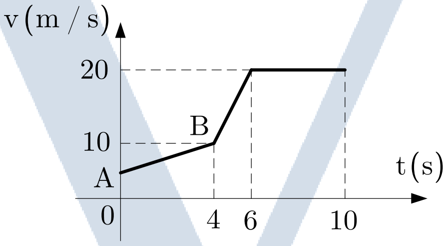
Logo:

$$x = 1166400 \Rightarrow x = 1,2 \cdot 10^6$$

Opção B

Questão 52

O gráfico abaixo representa a indicação da velocidade de um carro em movimento, em função do tempo.



Sabendo-se que, em $t = 2$ s, a velocidade é de 6 m/s, a ordenada do ponto A é:

(A) 3,5 (B) 3,0 (C) 2,5 (D) 2,0

Solução:

Entre os pontos **A** e **B** temos um segmento de reta, logo, a variação é contstante e podemos fazer:

$$f(x) = ax + b$$
$$f(4) = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 10$$
$$f(2) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 6$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

Calculando b (ordenada do ponto A):

$$2a + b = 6 \Rightarrow b = 6 - 4 \Rightarrow b = 2$$

Opção D

Curso Mentor

Vestibular 1996/1997

1ª Fase

Questão 1

Millôr Fernandes, em uma bela homenagem à Matemática, escreveu um poema do qual extraímos o fragmento abaixo:

Às folhas tantas de um livro de Matemática,
um Quociente apaixonou-se um dia doidamente
por uma Incógnita.
Olhou-a com seu olhar inumerável
e viu-a do ápice à base: uma figura ímpar;
olhos rombóides, boca trapezóide,
corpo retangular, seios esferóides.
Fez da sua uma vida paralela à dela,
até que se encontraram no Infinito.
"Quem és tu?" – indagou ele em ânsia radical.
"Sou a soma dos quadrados dos catetos.
Mas pode me chamar de hipotenusa."
(Millôr Fernandes. Trinta Anos de Mim Mesmo.)

A Incógnita se enganou ao dizer quem era. Para atender ao Teorema de Pitágoras, deveria dar a seguinte resposta:
(A) "Sou a soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa."
(B) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de hipotenusa."
(C) "Sou o quadrado da soma dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa."
(D) "Sou a soma dos quadrados dos catetos. Mas pode me chamar de quadrado da hipotenusa."

Solução:
De acordo com o Teorema de Pitágoras um triângulo retângulo de lados **a**, **b** e **c** sendo a o maior lado temos a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Ou seja, *"a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos"*.

Opção D

Questão 2

O engenheiro Ronaldo Belassiano descobriu que o carioca é o povo mais ágil para embarcar nos coletivos. Ele leva, em média, apenas 1,85 segundo contra 2,4 segundos gastos, em média, pelos londrinos.

(Super Interessante, set/96 - com adaptações.)

Com base no texto, considere que um ônibus no Rio de Janeiro fique parado num ponto, durante 74 segundos, e embarque passageiros de acordo com a média apresentada.
Em Londres, para embarcar essa mesma quantidade de passageiros, o ônibus deverá ficar parado durante:

(A) 96 s (B) 104 s (C) 108 s (D) 220 s

Solução:

Primeiro calculamos o total de passageiros **n** que embarcaria no Rio de Janeiro segundo os dados apresentados:

$$n = \frac{74}{1,85}$$

$$n = 40$$

Ou seja, embarcariam 40 passageiros. Em Londres, portanto, teríamos:

$$40 = \frac{t}{2,4}$$

Onde t representa o tempo que o ônibus fica parado:

$$t = 40 \cdot 2,4 \Rightarrow t = 96 \text{ s}$$

Opção A

Questão 3

(O Globo, 30/08/96.)

O cálculo errado da gorjeta levou os dois amigos a pagarem uma conta de R$ 58,00, quando o valor correto a ser pago deveria ser R$ 18,00 + 10% de 18,00.
Se soubessem um pouquinho de aritmética, esses clientes poderiam ter economizado, em reais, a quantia de:

(A) 36,20 (B) 38,20 (C) 39,00 (D) 48,20

Solução:
Realizando a conta correta teremos o valor **c** da conta:

$$c = 18 + \frac{10}{100} \cdot 18$$

$$c = 18 + 1,8 \Rightarrow c = 19,8$$

Sendo **e** o valor que seria economizado podemos calculá-lo fazendo:

$$e = 58 - 19,8$$

$$e = 38,2$$

Opção B

Questão 4

Observe o sistema:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{1}{X} \\ X^2 + Y^2 = r^2 \end{cases}$$

O menor valor inteiro de **r** para que o sistema acima apresente quatro soluções reais é:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Solução 1:

Seja o sistema dado:

$$\begin{cases} Y = \dfrac{1}{X} \\ X^2 + Y^2 = r^2 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação na segunda:

$$X^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2 = r^2$$

$$X^2 + \frac{1}{X^2} = r^2$$

Fazendo o MMC teremos a expressão:

$$\frac{X^4 + 1}{X^2} = \frac{r^2 X^2}{X^2}$$

Como X^2 não é nulo teremos:

$$X^4 - r^2 X^2 + 1 = 0$$

Fazendo $X^2 = t$:

$$t^2 - r^2 t + 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau em função de **t**:

$$\Delta = \left(-r^2\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Delta = r^4 - 4$$

Para que as soluções sejam reais, é preciso que $\Delta > 0$, daí:

$$r^4 - 4 > 0$$

$$r^4 > 2^2$$

Resolvendo esta inequação:

$$r < -\sqrt[4]{2^2} \quad \text{ou} \quad r > \sqrt[4]{2^2}$$

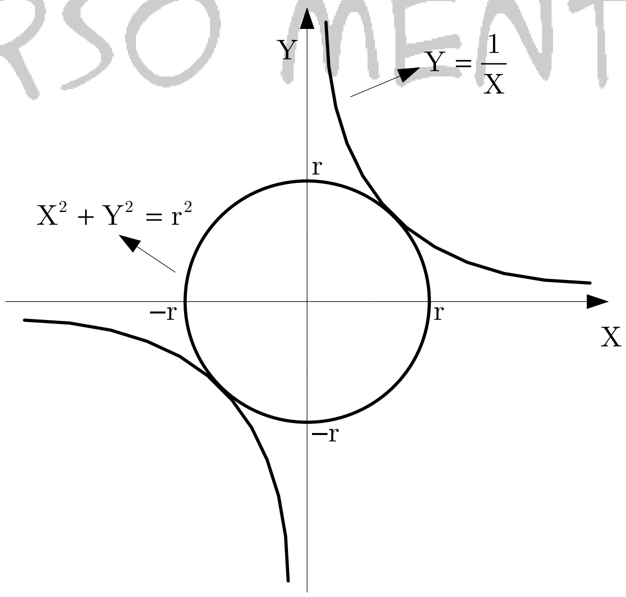
Aplicando as propriedades de potências:

$$r < -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad r > \sqrt{2}$$

Como $\sqrt{2} \cong 1,4142$ o menor inteiro que satisfaz as condições acima é 2.

Solução 2:

Podemos fazer uma solução mais gráfica. Traçando os gráficos das duas curvas sob um mesmo eixo teremos a figura abaixo:



Repare que, a medida que aumentamos **r**, o círculo se aproxima de interceptar a reta. Quando $r = \sqrt{2}$ teremos:

$$X^2 + Y^2 = 2 \text{ e } Y = \frac{1}{X}$$

Por observação, vemos que $X = Y = 1$ é solução para este problema, ou seja, a partir deste valor a circunferência tangencia a curva, exatamente como na figura que desenhamos.

Opção B

Questão 5

A superfície de uma esfera pode ser calculada através da fórmula: $4\pi R^2$, onde R é o raio da esfera. Sabe-se que $\frac{3}{4}$ da superfície do planeta Terra são cobertos por água e $\frac{1}{4}$ da superfície restante é coberto por desertos. Considere o planeta Terra esférico, com seu raio de 6.400 km e use π igual a 3.
A área dos desertos, em milhões de quilômetros quadrados, é igual a:

(A) 122,88 (B) 81,92 (C) 61,44 (D) 40,96

Solução:

Como três quartos são cobertos por água, apenas um quarto não o é. Deste $\frac{1}{4}$ temos $\frac{1}{3}$ que é coberto por desertos. Queremos então a área S:

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot \pi \cdot (6400)^2$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6400 \cdot 6400$$

$$S = 6400 \cdot 6400$$

$$S = 40960000 \text{ km}^2$$

Dividindo 10^6:

$$\frac{S}{10^6} = \frac{40960000}{10^6} \text{ km}^2 \Rightarrow \frac{S}{10^6} = 40,96 \text{ km}^2$$

Opção D

Questão 6

(O Globo.)

Eddie Sortudo não deseja contar com a sorte e espera ganhar um pouco de tempo, acreditando que a munição do inimigo acabe. Suponha, então que, a partir do primeiro número falado por Eddie, ele dirá, cada um dos demais, exatamente 3 segundos após ter falado o anterior, até que chegue ao número determinado pelo seu comandante. Assim, com sua estratégia, Eddie conseguirá ganhar um tempo, em segundos, igual a:

(A) 177 (B) 188 (C) 237 (D) 240

Solução:

A sequência utilizada por Eddie é uma P.A. de razão $\frac{1}{8}$. O que queremos é saber quantos termos haverá até chegar a 10, ou seja, queremos que $a_n = 10$ e descobrir o valor de **n**. Então, da fórmula do termo geral da P.A.:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

Substituindo os dados do enunciado:

$$10 = \frac{1}{8} + (n-1) \cdot \frac{1}{8}$$

$$10 = \frac{1}{8} + \frac{n}{8} - \frac{1}{8}$$

$$10 = \frac{n}{8} \Rightarrow n = 80$$

Para cada termo da contagem a partir do segundo temos 3 segundos, logo o total da contagem será de $240 - 3 = 237$ segundos.

Opção C

Questão 7

(Revista Veja, 14/07/93.)

Suponha que, dos imigrantes que chegaram aos Estados Unidos, 120 mil fossem brasileiros. Um dos 15 milhões de imigrantes teve sorte grande naquele país: ficou rico. A probabilidade de que esse imigrangte **NÃO** seja brasileiro é de:

(A) 0,80% (B) 9,92% (C) 80,00% (D) 99,20%

Solução:

Como as probabilidades são complementares basta calcularmos a probabilidade de um brasileiro ser rico e depois subtrair de 1 (que equivale a probabilidade de 100%).

Precisamos escolher 1 brasileiro em 15 milhões, como são 120 mil brasileiros:

$$P = \frac{120000}{15000000}$$

$$P = \frac{12}{1500} \Rightarrow P = \frac{4}{500} \Rightarrow P = 0,008$$

Calculando $1-P$:

$$1 - 0,008 = 0,992 = 99,2\%$$

Opção D

Questão 8

Nicole pediu a seu irmão João que pensasse em um número e efetuasse as seguintes operações, nesta ordem:

1ª) multiplicar o número pensado por 5
2ª) adicionar 6 ao resultado
3ª) multiplicar a soma obtida por 4
4ª) adicionar 9 ao produto
5ª) multiplicar a nova soma por 5

João comunicou que o resultado é igual a **K**.

As operações que Nicole deve efetuar com K, para "adivinhar" o número pensado, equivalem às da seguinte expressão:

(A) $(K - 165) : 100$ (B) $(K - 75) : 100$ (C) $K : 100 + 165$ (D) $(K + 165) : 100$

Solução:

Seja **x** o número que João pensou. Seguindo as operações indicadas por Nicole teremos a seguinte expressão que tem como resultado **K**:

$$\left[(5x+6)\cdot 4+9\right]\cdot 5 = K$$

Como queremos descobrir x, vamos isolá-lo na equação acima:

$$\left[(5x+6)\cdot 4+9\right] = \frac{K}{5}$$

$$(5x+6)\cdot 4 = \frac{K}{5} - 9$$

$$(5x+6) = \frac{\frac{K}{5} - 9}{4}$$

$$5x = \frac{\frac{K}{5} - 9}{4} - 6$$

$$x = \frac{\frac{\frac{K}{5} - 9}{4} - 6}{5}$$

Vamos desenvolver a expressão para encontrar uma das expressões:

$$x = \frac{\frac{\frac{K-45}{5}}{4} - 6}{5} \Rightarrow x = \frac{\frac{\frac{K-45}{5} - 24}{4}}{5}$$

$$x = \frac{\frac{\frac{K-45-120}{5}}{4}}{5} \Rightarrow x = \frac{\frac{K-165}{20}}{5} \Rightarrow x = \frac{K-165}{100}$$

Opção A

Questão 9

Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas, por 4 pessoas; outras, por apenas 2 pessoas, num total de 38 fregueses.
O número de mesas ocupadas por apenas 2 pessoas é:

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

Solução:
Seja **q** o número de mesas de **quatro** pessoas e **d**, o de **duas**. Podemos, a partir do enunciado, escrever as seguintes equações:

$$\begin{cases} q + d = 12 \\ 4q + 2d = 38 \end{cases}$$

Isolando d na primeira equação:

$$d = 12 - q$$
$$4q + 2(12 - q) = 38$$
$$4q + 24 - 2q = 38$$
$$2q = 38 - 24$$
$$q = \frac{14}{2} \Rightarrow q = 7$$

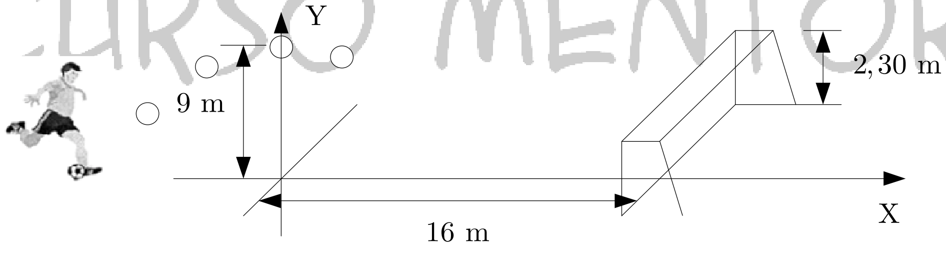
Substituindo em alguma equação:

$$d = 12 - 7 \Rightarrow d = 5$$

Opção B

Questão 10

Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.
A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura abaixo:



A equação da parábola era do tipo $Y = -\frac{X^2}{36} + C$

O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:
(A) na baliza
(B) atrás do gol
(C) dentro do gol
(D) antes da linha do gol

Solução:

Supondo o eixo XoY como indicado na figura, percebemos que o ponto $(0,9)$ pertence a curva dada:

$$Y=-\frac{X^2}{36}+C \Rightarrow 9=-\frac{0}{36}+C \Rightarrow C=9$$

Queremos descobrir o valor da ordenada Y, quando X vale 16 m:

$$Y=-\frac{16^2}{36}+9$$

$$Y=\frac{-256+324}{36}$$

$$Y=\frac{68}{36} \Rightarrow Y=\frac{34}{18} \Rightarrow Y=\frac{17}{9}$$

Como $\frac{17}{9}<2,3$ o bola cai dentro do gol.

Opção C

Questão 11

No Brasil, a rapadura surgiu no século XVII com os primeiros engenhos de cana-de-açúcar. Logo ganhou estigma de comida de pobre. No passado, era predominantemente consumida pelos escravos e mesmo hoje só eventualmente freqüenta as mesas mais fartas. Apesar disso, seu valor calórico é riquíssimo. Cada 100 gramas têm 132 calorias – ou seja, 200 gramas equivalem em energia a um prato de talharim com ricota.

(FERNANDES, Manoel. Revista Terra, ago/96.)

Triunfo, cidade do interior de Pernambuco, produz em rapadura por ano o equivalente a 1,98 bilhões de calorias. Isto representa, em toneladas, uma produção de rapadura correspondente a:

(A) 2000 (B) 1500 (C) 200 (D) 150

Solução:

É um problema de regra de três simples e direta:

Gramas		Calorias
100	—	132
x	—	$1,98\cdot 10^9$

Escrevendo as devidas proporções:

$$\frac{100}{x}=\frac{132}{1980000000}$$

$$x=\frac{198000000000}{132}$$

$$x=150000000 \text{ g}$$

Passando para toneladas:

$$x=150 \text{ ton}$$

Opção D

Questão 12

A figura 1 representa uma escada:

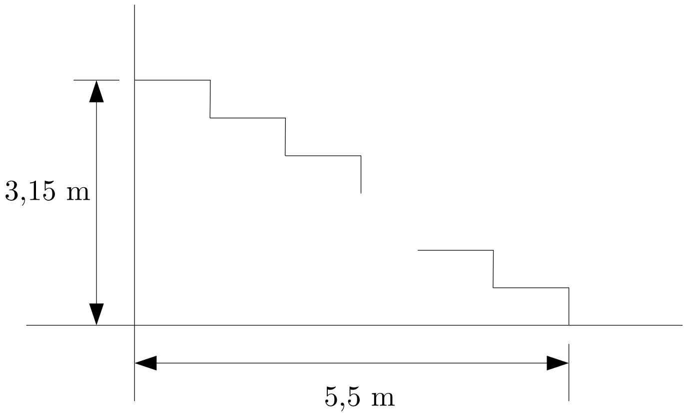


Figura 1

Ela é formada com degraus exatamente iguais, como indica a figura 2:

Figura 2

AB, com medida mínima de 25 cm, é paralelo ao piso.
BC, com medida mínima de 15 cm, é ortogonal ao plano do piso.
O número máximo de degraus que pode ter a escada é igual a:

(A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 22

Solução:
Vamos dividir a altura total **H** pela altura mínima **h** de um degrau:

$$\frac{H}{h} = \frac{3,15}{0,15} \Rightarrow \frac{H}{h} = 21$$

O que quer dizer que, no máximo, poderíamos ter **21** degraus com esta altura.
Vamos, agora, dividir a largura total **L** pela largura mínima **l** de um degrau:

$$\frac{L}{l} = \frac{5,50}{0,25} \Rightarrow \frac{L}{l} = 21$$

O que quer dizer que, no máximo, poderíamos ter **21** degraus com esta largura.

Opção C

Questão 13

Em uma pesquisa sobre infecção hospitalar foram examinados 200 estetoscópios de diferentes hospitais.
O resultado da pesquisa revelou que:
I) todos os estetoscópios estavam contaminados;
II) em cada um deles havia um único tipo de bactéria;
III) ao todo foram detectados 17 tipos distintos de bactérias nesses 200 estetoscópios examinados;
IV) os estetoscópios recolhidos do primeiro hospital estavam contaminados, só e exclusivamente, por 5 dentre os 17 tipos de bactérias;
V) depois do exame de 187 estetoscópios, verificou-se que todos os 17 tipos de bactérias apareceram em igual número de vezes;

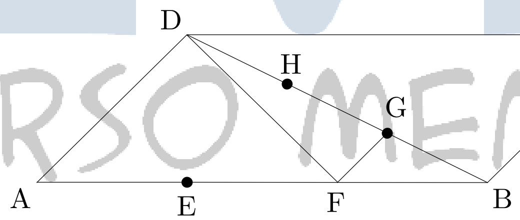
VI) entre os 13 estetoscópios restantes, observou-se a presença de 13 tipos diferentes de bactérias, dentre os 17 tipos encontrados na pesquisa.
A análise dos resultados desta pesquisa permite afirmar que a quantidade mínima de estetoscópios contaminados no primeiro hospital é:

(A) 54 (B) 55 (C) 56 (D) 57

Solução:
Como foram avaliados **187** estetoscópios e havia **17** bactérias que apareceram em **igual número**, podemos concluir que cada bactéria foi detectada $\frac{187}{17} = 11$ vezes.
No **primeiro hospital** só houve detecção de **5** tipos de bactérias e cada uma, no máximo, só poderia ter aparecido **11 vezes**, teríamos, no pior caso, 55 estetoscópios contaminados no primeiro hospital.
Cada estetoscópio só está contaminado por **um tipo de bactéria**, daí os **13 restantes** têm, cada um, apenas **um único tipo de bactéria**.
As cinco bactérias encontradas no primeiro hospital podem estar entre as 13 encontradas no final, daí **aumentariamos em 5 unidades** as já encontradas no primeiro; em outra situação, somente **uma estaria entre as 5**, pois este seria o maior "afastamento" possível, já que $17-13=4$.
Assim poderíamos ter de $55+1=56$ a $55+5=60$.
Observação: O problema não diz quantos hospitais são, portanto poderíamos ter apenas dois hospitais um com 5 estetoscópios contaminados por 5 bactérias diferentes e outro com 182 estetoscópios distribuindo as bactérias restantes. Outro ponto a ser considerado é que o problema não deixa claro se os 13 estetoscópios finais são ainda do primeiro hospital, poderiam – no nosso exemplo – ser do segundo, deixando primeiro com apenas 5 estetoscópios contaminados.
Em nossa opinião, o texto não está claro o suficiente, porém, baseando-se nestes dados, é possível chegar à alternativa correta.

Opção C

Questão 14



O paralelogramo ABCD teve o lado (AB) e a sua diagonal (BD) divididos, cada um, em três partes iguais, respectivamente, pelos pontos {E,F} e {G,H}. A área do triângulo FBG é uma fração da área do paralelogramo (ABCD).
A sequência de operações que representa essa fração está indicada na seguinte alternativa:

(A) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$ (D) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$

Solução:

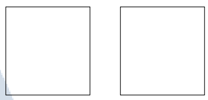
Por semelhança de triângulos, temos que a altura do triângulo FBG é $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo ABD. O mesmo ocorre para a base. Sendo assim a área de FBG equivale a $\frac{1}{9}$ da área de ABD.
Como a diagonal divide a área do paralelogramo em duas partes, a relação entre a área P do paralelogramo e a área S do triângulo é dada pela expressão:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}P = S$$

Opção A

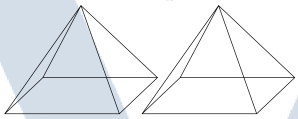
Questão 15

Um empregado de obra montou uma estrutura metálica para a cobertura de um galpão retangular de 5 metros por 8 metros, usando tubos de um metro de comprimento, da seguinte forma:
I) contou e armou todos os quadrados necessários, com um metro de lado, para cobrir a área desejada;



...etc

II) armou uma pirâmide para cada base quadrada;



...etc

III) juntou todas as pirâmides pelas bases e usou os tubos que sobraram para unir os seus vértices.
Observe as figuras:

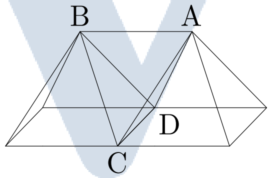
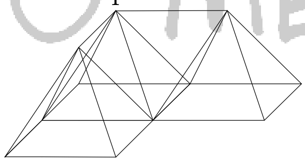


Figura 3

O tubo que sobrou em CD foi usado para unir os vértices A e B.



...etc

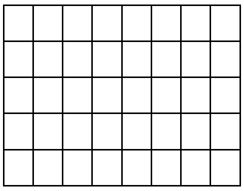
Figura 4

A quantidade de tubos necessária para cobrir o galpão é:
(A) 240 (B) 280 (C) 300 (D) 320

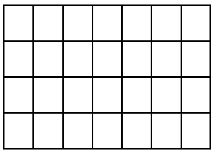
Solução:
Como o galpão tem medidas 5 e 8 metros ele tem área S igual a:

$$S = 5\cdot 8 \Rightarrow S = 40\text{ m}^2$$

Ou seja, há 40 quadrados de 1 metro quadrado, lado a lado, cobrindo o galpão. Pensando nas "arestas" há $9\times 5 = 45$ arestas "em pé" e $8\times 6 = 48$ arestas "deitadas". Basta observar a matriz abaixo:



Cada "quadrado" possui quatro arestas laterais para levar ao topo da pirâmide, logo há 160 arestas levando ao topo.
Agora precisamos ligar os centros, pensando analogamente a primeira etapa teremos $4\times 8=32$ arestas "em pé" e $7\times 5=35$ arestas "deitadas". Veja a matriz:



Somando todas as arestas temos o total T:

$$T=45+48+160+32+35$$
$$T=320$$

Observação: Neste problema tomamos o caminho "mais longo" para tornar o raciocínio mais encadeado. Analisando de forma mais "profunda" basta pensarmos que cada base quadrada gera uma pirâmide totalizando 8 arestas e que a aresta retirada na união éusada para unir os centros. Há 40 quadrados de 8 arestas, logo há 320 arestas.

Opção D