Soluções de Questões de Matemática IFRJ

22 de novembro

2010

Esta apostila contém soluções comentadas das questões de matemática de provas de seleção para o Ensino Médio no IFRJ – Instituto Federal do Rio de Janeiro

IFRJ/Ensino Médio

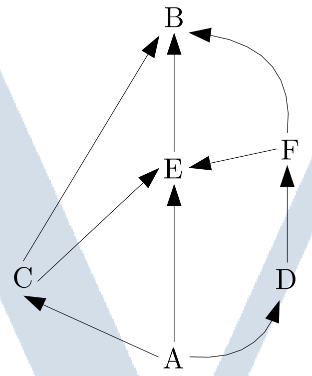
CURSO MENTOR

Soluções de Questões de Matemática do IFRJ

Prova 2010/2011

Questão 11

O engarrafamento no trânsito das grandes metrópoles do Brasil é resultado do crescimento sem o devido planejamento urbano. Seguindo a moda dos sistemas *on-line* de participação da população no processo decisório de planejamento do tráfego, õ diagrama abaixo mostra um esquema de ruas que um automóvel pode percorrer para ir do ponto A ao ponto B de uma grande cidade. Neste diagrama, as setas indicam o único sentido possível de se percorrer cada uma das ruas.



A quantidade total de possibilidades de caminho para ir do ponto A ao B pelas ruas desse diagrama é

(A) 3 (B) 5 (C) 7 (D) 9

Solução:

Vamos enumerar as maneiras de ir de A a B seguindo as setas:

ACB, ACEB, AEB, ADFEB, ADFB

São, portanto, 5 possibilidades.

Opção B

Questão 12

Em novembro de 2009, boa parte de um país sofreu uma pane na rede elétrica. O blecaute começou exatamente às 22 h 13 min de 10 de novembro e terminou às 3 h 15 min do dia 11 de novembro.

A duração desse blecaute foi, em segundos, de

(A) 68.220 (B) 30.200 (C) 18.120 (D) 11.370

Solução:

O blecaute começou às 22 h 13 min, então até às 00 h 00 min serão 1 h 47 min, logo:

$$60 + 47 = 107 \text{ min}$$

Transformando em segundos:

$$107 \cdot 60 = 6420 \text{ s}$$

Das 00 h 00 min até às 3 h 15 min serão 3 h e 15 min, logo:

$$180 + 15 = 195 \text{ min}$$

Transformando em segundos:

$$195 \cdot 60 = 11700 \text{ s}$$

Somando o total de segundos:

$$6420 + 11700 = 18120 \text{ s}$$

Opção C

Questão 13

Segundo a Previdência Social, o INSS recolhe dos trabalhadores 8% do salário de contribuição de até um determinado valor.
Sabendo que um empregado teve R$ 74,40 recolhidos ao INSS no mês de julho de 2010, o valor do salário de contribuição, em julho de 2010, foi

(A) R$ 595,20 (B) R$ 832,17 (C) R$ 930,00 (D) R$ 1.040,22

Solução 1:
Podemos usar regra de três:

$$74,4 — \frac{8}{100}$$

$$x — \frac{100}{100}$$

Então:

$$\frac{74,4}{x} = \frac{\frac{8}{100}}{1} \Rightarrow x = \frac{74,4 \cdot 100}{8}$$

$$x = \frac{7440}{8} \Rightarrow x = 930$$

Solução 2:
Podemos usar a equação:

$$74,4 = \frac{8}{100} \cdot x \Rightarrow x = \frac{7440}{8} \Rightarrow x = 930$$

Chegando ao mesmo valor.

Opção C

Questão 14

Uma gráfica tem capacidade operacional para imprimir 12.500 livros de 120 páginas cada, em 15 dias de trabalho, utilizando 4 máquinas impressoras iguais e trabalhando 8 horas diárias. Tendo recebido uma encomenda de impressão de 18.000 constituições (livros de 150 páginas cada), que deverão ser entregues em 24 dias, o proprietário resolveu comprar mais máquinas impressoras iguais às já existentes na gráfica. Trabalhando 6 horas diárias para o cumprimento da encomenda, a tipografia deverá comprar o seguinte número **mínimo** de máquinas:

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

Solução 1:
O problema em questão é uma regra de três composta. Vamos tabelar os dados, indicando quais são diretamente e quais são inversamente proporcionais:

Livros	Páginas	Dias	Máquinas	Jornada(h / dia)
12500	120	15	4	8
18000	150	24	x	6
dp	dp	ip	—	ip

Sendo assim a equação fica:

$$\frac{4}{x}=\frac{6}{8}\cdot\frac{24}{15}\cdot\frac{120}{150}\cdot\frac{12500}{18000}$$

Fazendo os devidos cancelamentos:

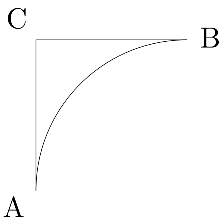
$$\frac{4}{x}=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{4}{1}\cdot\frac{5}{30}\Rightarrow x=6$$

Como já havia 4 máquinas deverão ser compradas duas máquinas.

Opção A

Questão 15

Na construção de uma estrada, ligando os locais A e B, a idéia inicial era construí-Ia como um arco de circunferência de $\frac{\pi}{2}$ radianos, com o raio medindo 6 km. Mas, o planejamento foi mudado para que a estrada passe pelo ponto C.



Considerando $A\hat{C}B$ um ângulo reto e os pontos A e B de tangência entre os trajetos, conforme indicado na figura, assinale o valor aproximado, em quilômetros, do **aumento** acarretado por essa mudança.

(Considere $\pi = 3{,}14$)

(A) 0,94 (B) 1,20 (C) 1,57 (D) 2,58

Solução:

O percurso que é um arco tem comprimento:

$$C=\frac{1}{4}2\pi r$$

$$C=\frac{\pi\cdot 6}{2}\Rightarrow C=3\pi \text{ km}$$

Passando por C em ângulo reto o percurso será equivalente a:

$$C'=2\cdot 6\Rightarrow C'=12 \text{ km}$$

Considerando $\pi = 3{,}14$ a diferença entre os percursos será:

$$C'-C=12-3\cdot 3{,}14\Rightarrow C'-C=2{,}58 \text{ km}$$

Opção D

Questão 16

Numa disputa eleitoral entre dois candidatos A e B, houve 100 votos computados numa urna, incluindo os em branco e os nulos. Segundo a legislação eleitoral brasileira, a quantidade de votos válidos é obtida retirando-se do total a quantidade de votos em branco e de nulos. Sabe-se que nessa urna, o candidato A obteve 72% dos votos válidos e o candidato B, 21 votos.

Logo, a quantidade dos votos em branco e dos nulos dessa urna corresponde a

(A) 15 (B) 25 (C) 28 (D) 79

Solução:

Vamos chamar o total de votos brancos mais nulos de **x**. Assim:

$$x + \underbrace{\frac{72}{100}(100 - x)}_{\text{Votos do candidato A}} + \underbrace{21}_{\substack{\text{Votos do} \\ \text{candidato B}}} = 100$$

Resolvendo esta equação:

$$x + 72 - \frac{72x}{100} = 100 - 21$$
$$\frac{100x - 72x}{100} = 79 - 72$$
$$\frac{28x}{100} = 7 \Rightarrow x = 25$$

Opção B

Questão 17

Para cobrir os gastos com a campanha eleitoral, um candidato a Deputado Federal distribuiu R$ 210.000,00 para 4 comitês do seguinte modo: o segundo recebeu a metade do que recebeu o primeiro; o terceiro recebeu a metade da soma das quantias que receberam o primeiro e o segundo; e o quarto, a metade do que recebeu o terceiro.
O segundo comitê dessa campanha recebeu, em **reais**, a quantia de

(A) 400.000 (B) 100.000 (C) 80.000 (D) 40.000

Solução:
Sejam x, y, z e w o que receberam respectivamente os quatro comitês. De acordo com o enunciado temos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ w = \dfrac{\frac{x+y}{2}}{2} \\ x + y + z + w = 210000 \end{cases}$$

Comparando a segunda e a primeira equações teremos:

$$z = \frac{x + \frac{x}{2}}{2} \Rightarrow z = \frac{3x}{4}$$

Comparando a terceira e a segunda equações teremos:

$$w = \frac{\frac{x + \frac{x}{2}}{2}}{2} \Rightarrow w = \frac{3x}{8}$$

Substituindo estes resultados na quarta equação:

$$x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} + \frac{3x}{8} = 210000$$
$$\frac{8x + 4x + 6x + 3x}{8} = 210000$$
$$\frac{21x}{8} = 210000 \Rightarrow x = \frac{210000 \cdot 8}{21} \Rightarrow x = 80000$$

O segundo comitê terá recebido então:

$$y = \frac{80000}{2} \Rightarrow y = 40000$$

Opção D

Questão 18

Considere estas desigualdades.

$$\begin{cases} \dfrac{3x}{4} \le \dfrac{2x+15}{3} \\ \dfrac{x-3}{-2} \le 1 \end{cases}$$

A quantidade de números inteiros x, que satisfaz simultaneamente às duas desigualdades, é

(A) infinita (B) 1 (C) 56 (D) 60

Solução:

Vamos observar cada desigualdade em separado:

$$\textbf{1)}\ \frac{3x}{4} \le \frac{2x+15}{3}$$

Como os denominadores são **positivos**, podemos fazer:

$$3 \cdot 3x \le (2x+15) \cdot 4$$
$$9x \le 8x + 60$$
$$x \le 60$$

Observando a segunda desigualdade:

$$\textbf{2)}\ \frac{x-3}{-2} \le 1$$

Aqui o denominador é **negativo**, portanto ao multiplicar cruzado precisamos inverter a desigualdade:

$$x - 3 \ge -2$$
$$x \ge 1$$

Fazendo a interseção das soluções teremos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 60\}$$

Há, portanto 60 inteiros que satisfazem ambas as desigualdades.

Opção D

Questão 19

Somente uma destas afirmações é **falsa**.

(I) João é mais alto do que Artur.
(II) Tales é mais baixo que Artur.
(III) A altura de João é a metade da soma das alturas de Artur e Tales.
(IV) João é mais baixo que Tales.

Indique a alternativa na qual aparecem, em **ordem crescente** de altura, os dois rapazes mais baixos.

(A) João e Tales (B)Tales e João (C) João e Artur (D)Artur e João

Solução:

Sejam **J**, **A** e **T** as iniciais que representam as alturas de João, Artur e Tales respectivamente.

Hipótese 1: Vamos supor que a afirmativa I seja a falsa:

Logo, de acordo com I, II e III:

$$T < J < A$$

Incoerente, pois forçaria I e IV a serem falsas.

Hipótese 2: Vamos supor que a afirmativa II seja a falsa:
Logo, de acordo com I, II e III:

$$A < J < T$$

O que nos dá a sequência **correta**.

Hipótese 3: Vamos supor que a afirmativa III seja a falsa:
Logo, de acordo com I, II e III:

$$T < A < J$$

Incoerente, pois forçaria III e IV a serem falsas.

Hipótese 4: Vamos supor que a afirmativa IV seja a falsa:
Logo, de acordo com I, II e III:

$$T < J < A$$

Incoerente, pois forçaria IV a ser verdadeira, contrariando a hipótese.

Opção D

Questão 20

Se $2x - 3y - z = 0$ e $x + 3y - 14z = 0$, $y \neq 0$ e $z \neq 0$, o valor de $\frac{x^2 + 3xy}{y^2 + z^2}$ é

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9

Solução:
Vamos isolar z na primeira expressão:

$$2x - 3y - z = 0 \Rightarrow z = 2x - 3y$$

Substituindo na segunda expressão achamos x em função de y:

$$x + 3y - 14\underbrace{(2x - 3y)}_{z} = 0$$

Daí:

$$x + 3y - 28x + 42y = 0$$
$$-27x = -45y$$
$$x = \frac{5y}{3}$$

Voltando a primeira equação:

$$z = 2x - 3y \Rightarrow z = 2 \cdot \frac{5y}{3} - 3y$$

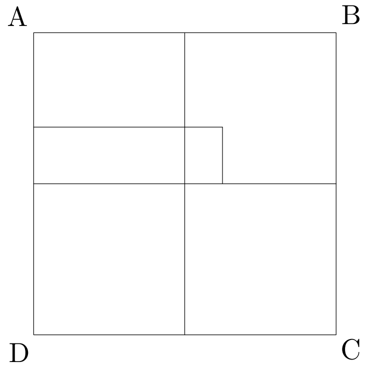
$$z = \frac{y}{3}$$

Substituindo estes resultados na expressão dada:

$$\frac{x^2 + 3xy}{y^2 + z^2} = \frac{\left(\frac{5y}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{5y}{3}\right)y}{y^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2} = \frac{\frac{25y^2}{9} + 5y^2}{\frac{9y^2 + y^2}{9}} = \frac{\frac{70y^2}{9}}{\frac{10y^2}{9}} = \frac{70y^2}{9} \cdot \frac{9}{10y^2} = 7$$

Opção B

Questão 21
Observe o quadrilátero ABCD desta figura.

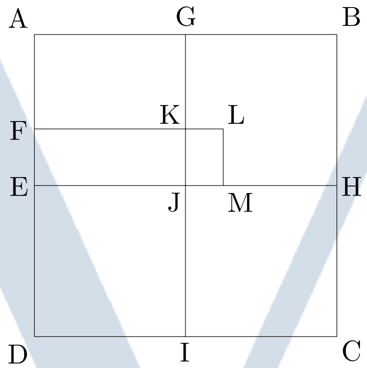


O número máximo de quadriláteros que podem ser visualizados nessa figura é

(A) 15 (B) 14 (C) 11 (D) 7

Solução:

Vamos dar nomes as interseções e enumerar os quadriláteros possíveis:



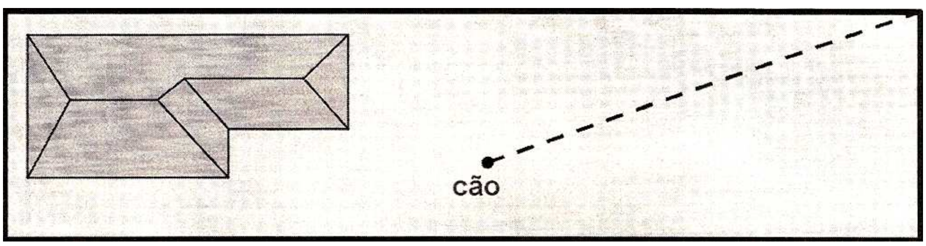
ABCD, AGID, AGJE, AGKF, ABHE, FKJE, FLME, FKID, KLMJ, EJID, EHCD, GBHJ, GBCI, JHIC

Há, portanto, 14 quadriláteros possíveis.

Opção B

Questão 22

Preocupado com a falta de segurança em sua propriedade, um terreno retangular de dimensões 30 m x 120 m, o proprietário amarrou um cão feroz num dos cantos (vértices) do terreno, com uma corda de comprimento igual a 60 m, como na figura.

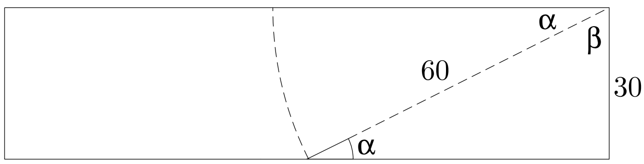


Considerando $\pi = 3{,}14$ e $\sqrt{3} = 1{,}73$, o valor aproximado da área do terreno, que está sob a proteção do cão, é de

(A) 314,00 m^2 (B) 1.393,50 m^2 (C) 1.720,50 m^2 (D) 2.100,00 m^2

Solução:

Quando o cão chegar a lateral inferior do terreno, teremos um triângulo retângulo. Veja a figura simplificada abaixo:



Calculando o seno do ângulo da corda com o muro teremos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{30}{60} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30°$$

Teremos então que $\beta = 60°$.

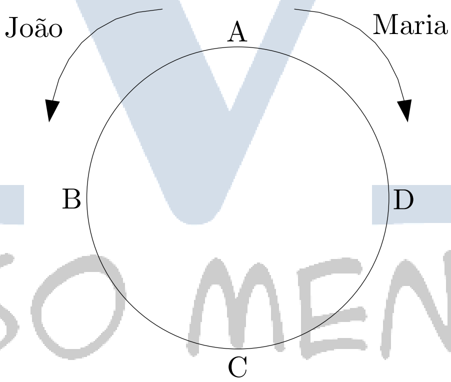
Assim, a área coberta pelo cão é composta de um triângulo retângulo somada a um setor circular de 30°, que corresponde a $\frac{1}{12}$ da área do círculo:

$$S = \frac{1}{12}\pi(60)^2 + \frac{30\sqrt{3} \cdot 30}{2}$$
$$S = 300 \cdot 3,14 + 450 \cdot 1,73$$
$$S = 1720,50$$

Opção C

Questão 23

João e Maria caminham em uma pista circular, em sentidos opostos, partindo inicialmente do ponto A, conforme esta figura.



Sabe-se que a velocidade de João é o dobro da velocidade de Maria e que, após 6 minutos do início da caminhada, Maria passa pelo ponto D, pela 1ª vez.

Então, mantidas essas condições e uma velocidade constante, João e Maria se encontrarão, pela 1ª vez, no ponto de partida A, depois de decorridos

(A) 12 minutos (B) 16 minutos (C) 18 minutos (D) 24 minutos

Solução:

Como Maria leva 6 minutos para chegar ao ponto D ela levará 24 minutos para chegar ao ponto A novamente.

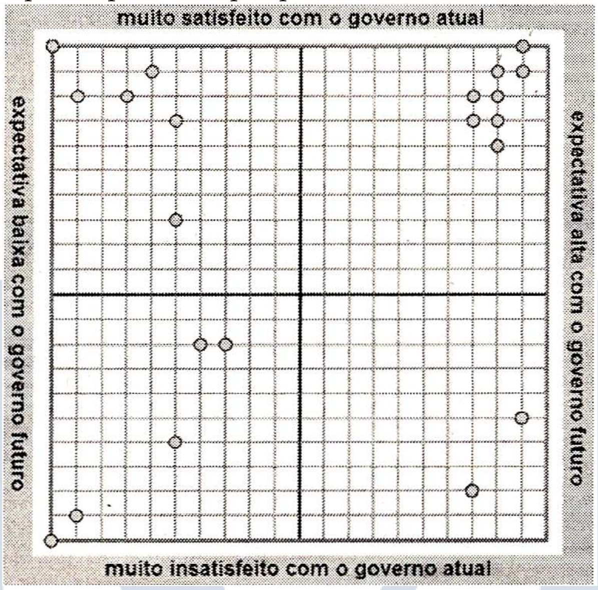
João por sua vez, em 6 minutos estará no ponto C e levará 12 minutos para retornar ao ponto A.

Concluímos que Maria passa por A em intervalos múltiplos de 24 enquanto João, em múltiplos de 12; Como $\text{MMC}(12, 24) = 24$ eles se encontrarão a cada 24 minutos no ponto A, sendo o primeiro encontro depois da partida, aos 24 minutos; o segundo aos 48, e assim por diante.

Opção D

Questão 24

Este gráfico representa uma pesquisa de ma de uma revista sobre a expectativa de como será o governo do próximo presidente. Cada ponto do gráfico corresponde a somente um indivíduo participante da pesquisa.



Adaptado da seção eleição da revista **VEJA**. Acesso em: 17 set. 2010.

Com base nesse gráfico, é correto afirmar que, entre os entrevistados,

(A) existem 100% a mais de pessoas satisfeitas do que insatisfeitas com o governo atual deste país.

(B) mais de 50% das pessoas entrevistadas têm expectativa alta.

(C) há mais pessoas com expectativas positivas do que pessoas com expectativas negativas, quanto ao próximo governo.

(D) 25% dos satisfeitos têm expectativa baixa.

Solução:

Há 21 pontos no gráfico e, portanto, 21 indivíduos participaram da pesquisa. Analisando as opções:

(A) **Verdadeira.** Satisfeitas: 14; Insatisfeitas 7. Então: $\frac{14}{7} = 2 = 200\%$

(B) **Falsa.** Expectativa alta: 10; Então: $\frac{10}{21} = 0,47 = 47\%$

(C) **Falsa.** Expectativa alta: 10; Expectativa baixa: 21;

(D) **Falsa.** Satisfeitos com expectativa baixa: 6; Então: $\frac{6}{14} = 0,42 = 42\%$

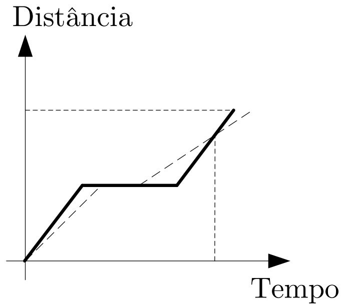
Opção A

Questão 25

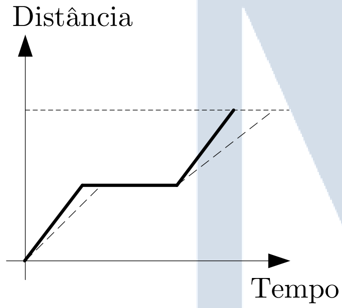
Dois atletas Antônio e Bruno começaram sua rotina de treino para as eliminatórias das Olimpíadas de 2014 com uma corrida leve do Flamengo a Botafogo. Algum tempo depois do início do percurso, Antônio, mais veloz que Bruno, parou e esperou ser alcançado por ele. Ao se encontrarem, ficaram parados por 5 min, até que Bruno, então correndo ainda mais lento, partisse. Antônio permaneceu parado por mais 5 minutos e,

depois, seguiu com a mesma velocidade com que iniciou o percurso. Quando Bruno estava próximo a completar o percurso, Antônio o ultrapassou e passou a correr ainda mais rápido.
Observando estes gráficos, assinale a alternativa que melhor representa a relação entre o espaço e o tempo da corrida desses dois atletas.

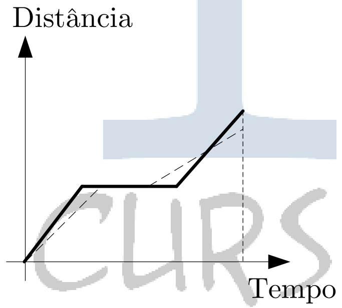
(A)



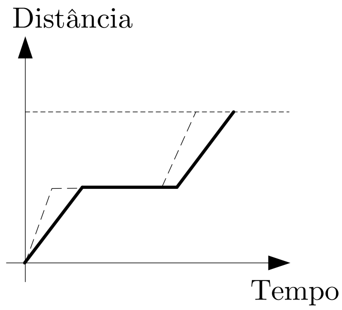
(B)



(C)



(D)



Solução:
Vamos analisar cada opção:
(A) Não pode ser a resposta apenas porque sugere que ambos chegam juntos na linha de chegada.

(B) Não pode ser a resposta porque mostra os corredores saindo juntos após a parada de 5 minutos e não há encontro após a parada.
(C) É a resposta.
(D) Não pode ser a resposta porque o mais veloz sai primeiro depois da parada e não há encontro depois da parada.

Opção C