Colégio Naval 2008/2009 (PROVA VERDE)

01) Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo eqüilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

(A) 6,5 (B) 7,0 (C) 7,5 (D) 8,0 (E) 8,5

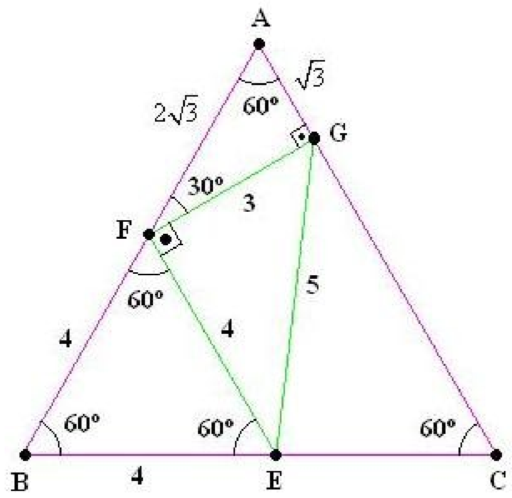
Resolução:

Podemos provar que todo triângulo retângulo em que os lados são consecutivos (e nesse caso estão em Progressão Aritmética), isto é, $(x - R,\ x,\ x + R)$ é da forma:

$(3R\ ,\ 4R,\ 5R)$ onde R é a diferença entre dois lados consecutivos.

Como os lados são consecutivos, podemos concluir que os lados do triângulo retângulo são: $(3\ ,\ 4\ ,\ 5)$

Assim montando a figura conforme o enunciado temos:



Observando o triângulo AFG vemos que é retângulo com ângulos de 30º, 60º e 90º.

Assim como o lado FG é igual a três, podemos determinar os outros lados, que são

FG oposto ao ângulo de 60º (metade da hipotenusa vezes a raiz de três)

$$\Rightarrow\ FG = \frac{AF}{2} \times \sqrt{3} \Rightarrow FG = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3 \quad \Rightarrow AF = 2\sqrt{3}$$

AG oposto ao ângulo de 30º (metade da hipotenusa) $\Rightarrow AG = \frac{AF}{2} \quad \Rightarrow AG = \sqrt{3}$

Daí pela figura temos que AB = BF + AF = $4 + 2\sqrt{3} \cong 4 + 2 \times 1,73 \cong 4 + 3,46 \cong 7,46$

Alternativa C

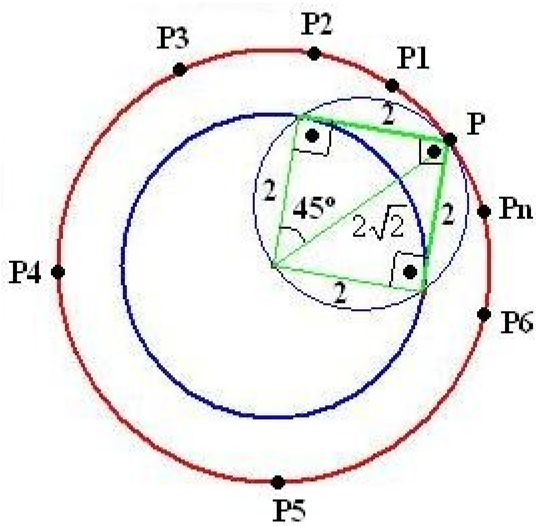
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

02) Duas tangentes a uma circunferência, de raio igual a dois centímetros, partem de um mesmo ponto P e são perpendiculares entre si. A área, em centímetros quadrados, da figura limitada pelo conjunto de todos os pontos P do plano, que satisfazem as condições dadas, é um número entre

(A) vinte e um e vinte e dois.
(B) vinte e dois e vinte e três.
(C) vinte e três e vinte e quatro.
(D) vinte e quatro e vinte e cinco.
(E) vinte e cinco e vinte e seis.

Resolução:

Fazendo a figura conforme o enunciado, temos:



Marcamos alguns pontos "P", mas na verdade existem infinitos pontos de tal maneira a até formar a cincumferência externa em vermelho.

Queremos determinar a área delimitada por essa circunferência, assim:

$A = \pi \cdot R^2$ e conforme a figua acima R = $2\sqrt{2} \Rightarrow A = \pi \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$\Rightarrow A = \pi \cdot (4 \times 2) \Rightarrow A = 8\pi \ cm \Rightarrow A \cong 8 \times (3{,}14)cm \cong 25{,}12$

Alternativa E (A Marinha do Brasil / Diretoria de Ensino da Marinha aceitou as alternativas “D “ e “ E” como corretas).

Obs: Dependendo da aproximação dada ao valor do número irracional π (por exemplo, $\pi = 3{,}1$ a resposta seria a alternativa D).

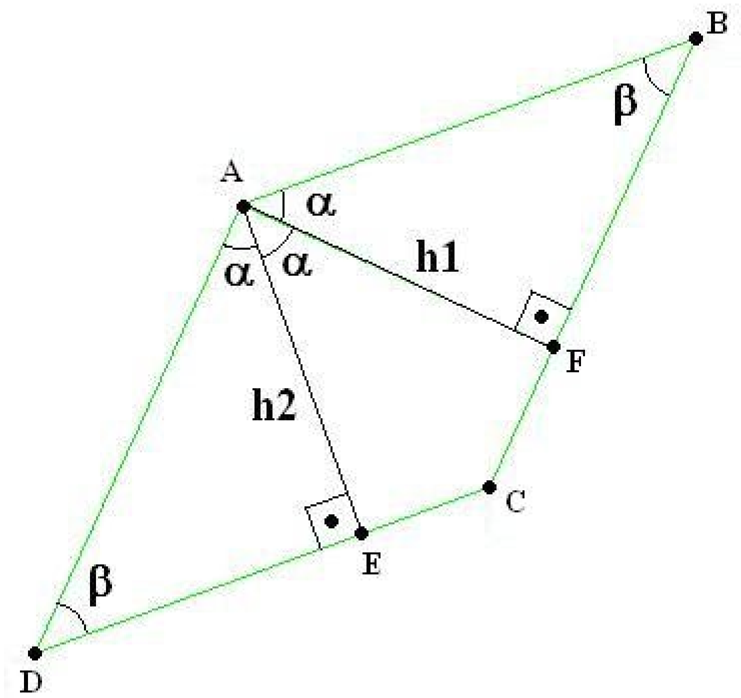
Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

03) Do vértice A traçam-se as alturas do paralelogramo ABCD. Sabendo-se que essas alturas dividem o ângulo interno do vértice A em três partes iguais, quanto mede o maior ângulo interno desse paralelogramo?

(A) 120º (B) 135º (C) 150º (D) 165º (E) 175º

Resolução:

Fazendo a figura conforme o enunciado, temos:



Observando a figura, podemos notar que:

Do triângulo ADE $\Rightarrow \ \alpha + \beta = 90^\circ$

E das propriedades do paralelogramo $\Rightarrow \ 3\alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + \underbrace{\alpha + \beta}_{90^\circ} = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 45^\circ \quad \Rightarrow \beta = 45^\circ$

Assim os maiores ângulos do paralelogramo são os ângulos BAD = BCD = 3α

Logo $3\alpha = 3 \times 45^\circ = 135^\circ$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

04) Qual é a soma dos quadrados das raízes da equação $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$, com x real se $x \neq \pm 1$?

(A) 16 (B) 20 (C) 23 (D) 25 (E) 30

Resolução:

Podemos resolver a equação $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$ se $x \neq 1$ e $x \neq -1$, assim:

Tirando o mmc dos denominadores $\Rightarrow \frac{2}{\left(x-1 \cancel{} x+1\right)}+\frac{3}{\left(x+1 \cancel{} x-1\right)}=\frac{1}{\left(1 \cancel{} (x-1)\cdot(x+1)\right)}$

$\Rightarrow 2(x+1)+3(x-1)=(x-1)\times(x+1) \Rightarrow 2x+2+3x-3=x^2-1 \Rightarrow 5x-1=x^2-1$

$\Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow x_1=0 \;\; ou \;\; x_2=5$

Logo $(x_1)^2+(x_2)^2=(0)^2+(5)^2=0+25=25$

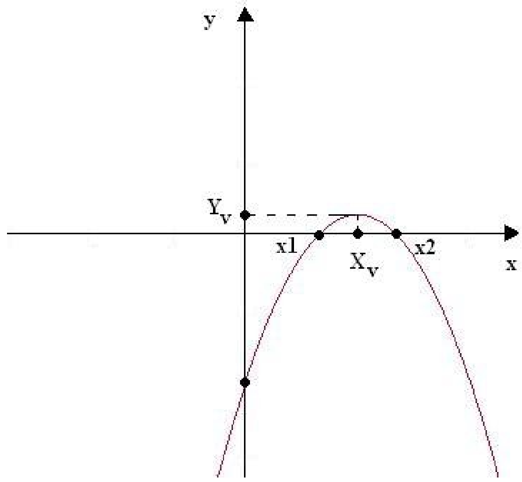
Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

05) O gráfico de um trinômio do 2º grau y tem concavidade para cima e intersecta o eixo das abscissas em dois pontos à direita da origem. O trinômio –y tem um valor
(A) mínimo e raízes positivas. (B) mínimo e raízes negativas.
(C) máximo e raízes positivas. (D) máximo e raízes negativas.
(E) máximo e raízes de sinais opostos.

Resolução:

Fazendo a uma possível figura conforme o enunciado, temos:



Como a concavidade da parábola está voltada pra cima o trinômio tem um ponto de valor máximo.
Como a parábola cortar o eixo do "x" em pontos a direita do zero, então isso indica duas raízes ou zeros positivos.

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

06) O mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum entre os naturais a, x e b, são respectivamente iguais a 1680 e 120. Sendo a $<$ x $<$ b, quantos são os valores de x que satisfazem essas condições?

(A) Nenhum. (B) Apenas um. (C) Apenas dois.
(D) Apenas três. (E) Apenas quatro.

Resolução:

Fazendo a decomposição em fatores primos dos números 120 e 1680, temos:

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$ e $1680 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$

Fatos que ajudam :

O mdc é constituído dos fatores comuns elevados aos menores expoentes

O mmc é constituído dos fatores comuns e não comuns elevados aos maiores expoentes

Assim por $a < x < b \Rightarrow$ x é da forma $X = \underbrace{2^{\alpha} \times 3^{\beta} \times 5^{\varphi}}_{\text{fatores comuns}} \times 7^{\theta}$

temos :

$$\left(\begin{array}{l} a)\ \alpha \in \{3,\ 4\} \\ b)\ \beta \in \{1\} \\ c)\ \varphi \in \{1\} \\ d)\ \theta \in \{0,\ 1\} \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\overset{\alpha}{\boxed{2}} \times \overset{\beta}{\boxed{1}} \times \overset{\varphi}{\boxed{1}} \times \overset{\theta}{\boxed{2}}}_{possibilidades} \Rightarrow 2 \times 1 \times 1 \times 2 = 4 \text{ valores}$$

Mas observe que $a \neq x$ e $x \neq b$, ou seja do valor encontrado temos que tirar essas duas possibilidades, assim 4 - 2 = 2 valores

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

07) Sejam y e z números reais distintos não nulos tais que $\frac{4}{yz}+\frac{y^2}{2z}+\frac{z^2}{2y}=3$. Qual é o valor de y+z?

(A) –2 (B) –1 (C) 0 (D) 2 (E) 3

Resolução:

$$\frac{4}{yz}+\frac{y^2}{2z}+\frac{z^2}{2y}=3 \Rightarrow \text{tirando o mmc, temos } \frac{4}{\cancel{yz}_{2}}+\frac{y^2}{\cancel{2z}_{y}}+\frac{z^2}{\cancel{2y}_{z}}=\frac{3}{\cancel{1}_{2yz}}$$

$$\Rightarrow 4\times 2+y^2\times y+z^2\times z=3\times 2yz \Rightarrow 8+y^3+z^3=6yz \Rightarrow y^3+z^3=6yz-8 \quad (1)$$

$$y^3+z^3=(y+z)^3-3yz(y+z) \quad (2)$$

Igualando (2) em (1), temos:

$$6yz-8=(y+z)^3-3yz(y+z) \Rightarrow \begin{cases} (y+z)^3=-8 \Rightarrow (y+z)=\sqrt[3]{-8} \Rightarrow (y+z)=-2 \\ 6yz=-3yz(y+z) \Rightarrow \underbrace{\cancel{6yz}}_{2}=\underbrace{\cancel{-3yz}}_{\cancel{-1}}(y+z) \Rightarrow (y+z)=-2 \end{cases}$$

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

08) Analise as afirmativas abaixo.
I – Dois números consecutivos positivos são sempre primos entre si.
II – Se o inteiro x é múltiplo do inteiro y e x é múltiplo do inteiro z, então x é múltiplo do inteiro yz.
III – A igualdade $(1/a) + (1/b) = 2/(a + b)$, é possível no campo dos reais.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(B) Apenas a afirmativa II é verdadeira.
(C) Apenas a afirmativa III é verdadeira.
(D) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(E) As afirmativas I, II e III são verdadeiras.

Resolução:

AFIRMATIVA (I) $\Rightarrow$ Seja $X = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \cdots \times P_n$ decomposto em fatores primos, observem que $P \in \left(P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n\right)$ divide X, seja Y = X + 1 o número sucessor a X, assim nenhum P que divide X divide Y, logo dois números consecutivos são primos entre si.
AFIRMATIVA CORRETA

AFIRMATIVA (II) $\Rightarrow$ Vamos dar um contra-exemplo, um exemplo para o qual o afirmativa do enunciado não vale, seja X = 20, Y = 4 e Z = 2 $\Rightarrow$ 4 divide 20, 2 divide 20, mas $4 \times 2 = 8$ não divide 20.
AFIRMATIVA FALSA

AFIRMATIVA (III) $\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{(a+b)} \Rightarrow \frac{1}{a/b} + \frac{1}{b/a} = \frac{2}{(a+b)} \Rightarrow \frac{(a+b)}{a \times b} = \frac{2}{(a+b)}$

$\Rightarrow (a+b)^2 = 2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab \Rightarrow a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = \cancel{2ab} \Rightarrow a^2 + b^2 = 0$

Como a^2 e b^2 são sempre positivos então $a^2 + b^2 \neq 0$
AFIRMATIVA FALSA

OBS: AFIRMATIVA (II), estaria correta se $y \mid x,\ z \mid x$ e $mdc(y,\ z) = 1 \Rightarrow yz \mid x$
Ou seja, só é válida se os inteiros "y" e "z" são primos entre si.

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

09) Um trinômio do 2º grau tem coeficientes inteiros, distintos e não nulos. Se o termo independente for uma das suas raízes, a outra será o
(A) inverso do coeficiente do termo de 1º grau.
(B) inverso do coeficiente do termo de 2º grau.
(C) simétrico inverso do coeficiente do termo do 1º grau.
(D) simétrico inverso do coeficiente do termo do 2º grau.
(E) simétrico inverso do coeficiente do termo independente.

Resolução:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{Temos que o PRODUTO DAS RAÍZES} = X_1 \times X_2 = \frac{c}{a}, \text{ mas por hipótese } X_1 = c$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \frac{c}{a} \text{ e } X_1 = c \Rightarrow c \times X_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow \cancel{c} \times X_2 = \cancel{c} \times \frac{1}{a} \Rightarrow X_2 = \frac{1}{a}$$

Alternativa B

10) Quantas vezes inteiras a raiz quadrada de 0,5 cabe na raiz cúbica de 10?
(A) Uma. (B) Duas. (C) Três. (D) Quatro. (E) Cinco.

Resolução:

$$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt{0,5}} = \frac{\sqrt[3 \times 2]{10^{1 \times 2}}}{\sqrt[2 \times 3]{(0,5)^{1 \times 3}}} = \frac{\sqrt[6]{100}}{\sqrt[6]{\left(\frac{5}{10}\right)^3}} = \frac{\sqrt[6]{100}}{\sqrt[6]{\frac{125}{1000}}} = \sqrt[6]{\frac{100000}{125}} = \sqrt[6]{800}$$

$$729 < 800 < 4096 \Rightarrow \sqrt[6]{729} < \sqrt[6]{800} < \sqrt[6]{4096} \Rightarrow 3 < \sqrt[6]{800} < 4$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

11) O número a≠0 tem inverso igual a b. Sabendo-se que $a + b = 2$, qual é o valor de $\left(a^3 + b^3\right) \times \left(a^4 - b^4\right)$?

(A) 8 (B) 6 (C) 4 (D) 2 (E) 0

Resolução:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a} = b, \text{ como } a \neq 0 \Rightarrow a \times b = 1 \\ a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow X^2 - 2X + 1 = 0 \Rightarrow X_1 = 1 \quad \text{e} \quad X_2 = 1$$

Logo $a = 1$ e $b = 1$, assim:

$$\left(a^3 + b^3\right) \times \left(a^4 - b^4\right) = \left(1^3 + 1^3\right) \times \left(1^4 - 1^4\right) = (1+1) \times (1-1) = 2 \times 0$$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

12) O valor de $\dfrac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(7+5\sqrt{2}\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2}$ é um número

(A) múltiplo de onze. (B) múltiplo de sete. (C) múltiplo de cinco.
(D) múltiplo de três. (E) primo

Resolução:

Uma questão muito difícil, uma maldade com os candidatos!

Vamos provar que $3+2\sqrt{2}$ é um quadrado perfeito, isto é, vamos encontrar "a" e "b" tais que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 3+2\sqrt{2}$

Observe que $2\sqrt{2} = 2\times1\times\sqrt{2} \Rightarrow a = 1$ e $b = \sqrt{2}$

Logo $\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 3+2\sqrt{2}$

Agora vamos provar que $7+5\sqrt{2}$ é um um cubo perfeito, isto é, vamos encontrar "a" e "b" tais que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 7+5\sqrt{2}$

Observe que $5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^3$ e $3\sqrt{2} = 3\times1^2\times\sqrt{2}$

$\Rightarrow a = 1$ e $b = \sqrt{2}$

Logo $\left(1+\sqrt{2}\right)^3 = 7+5\sqrt{2}$

Feito isso, temos:

$$\frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(7+5\sqrt{2}\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2008}}{\left(7+5\sqrt{2}\right)^{1338}}+3-2\sqrt{2} = \frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right]^{2008}}{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^3\right]^{1338}}+3-2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^2\right]^{2008}}{\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^3\right]^{1338}}+3-2\sqrt{2} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4016}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{4014}}+3-2\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2+3-2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2} = 3+\cancel{2\sqrt{2}}+3\cancel{-2\sqrt{2}} = 6$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

13) De uma determinada quantidade entre 500 e 1000 DVDs, se foram feitos lotes de 5 DVDs sobram 2; se forem feitos lotes com 12 sobram 9 e se forem feitos lotes com 14 DVDs sobram 11. Qual é a menor quantidade, acima de 5 DVDs por lote, de modo a não haver sobra?

(A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 13 (E) 15

Resolução:

De acordo com o enunciado podemos montar as divisões abaixo:

$$\begin{array}{r|l} N & 5 \\ \hline 2 & q1 \end{array} \Rightarrow N = 5q1 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} N & 12 \\ \hline 3 & q2 \end{array} \Rightarrow N = 12q2 + 9$$

$$\begin{array}{r|l} N & 14 \\ \hline 11 & q3 \end{array} \Rightarrow N = 14q3 + 11$$

Manobrando com essas igualdades, temos:

$N = 5q1 + 2 \Rightarrow N = 5q1 + \underbrace{5 - 3}_{=2} \Rightarrow N = \text{múltiplo de } 5 - 3$

$N = 12q2 + 9 \Rightarrow N = 12q2 + \underbrace{12 - 3}_{=9} \Rightarrow N = \text{múltiplo de } 12 - 3$

$N = 14q3 + 11 \Rightarrow N = 14q3 + \underbrace{14 - 3}_{=11} \Rightarrow N = \text{múltiplo de } 14 - 3$

Assim N = múltiplo comum de (5, 12, 14) - 3

Determinando o mmc de (5, 12, 14), temos:

mmc (5, 12, 14) = 420, mas esse valor não serve, pois $500 \leq N \leq 1000$

Então, temos que escolher um múltiplo de 420 que sirva, logo o valor é 840.

Daí como N = múltiplo comum de (5, 12, 14) - 3 $\Rightarrow N = 840 - 3 \Rightarrow N = 837$

Como $N = 837 = 9 \times 93$

Logo a quantidade pedida é igual a nove.

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

14) Sabendo-se que 2x + 3y = 12 e que mx + 4y = 16 são equações sempre compatíveis, com x e y reais, quantos são os valores de m que satisfazem essas condições?
a) Um b) Dois c) Três d) Quatro e) Infinitos

Resolução:

Pelo enunciado devemos determinar um valor para "m" de modo a satisfazer as duas equações, ou seja, temos que resolver o sistema formado pelas duas equações, assim:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ mx + 4y = 16 \end{cases} \Rightarrow$$

Para o sistema acima ser compatível, temos:

a) O sistema deverá ser possível e determinado, isto é:

$\frac{2}{m} \neq \frac{3}{4} \Rightarrow m \neq \frac{8}{3}$, logo para $m \neq \frac{8}{3}$ o sistema é possível e determinado.

Ou

b)O sistema deverá ser possível e indeterminado, isto é:

$\frac{2}{m} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16} \Rightarrow m = \frac{8}{3}$, logo para $m = \frac{8}{3}$ o sistema possível e indeterminado.

Concluímos assim, que para qualquer valor real de "m" o sistema será compatível.

Alternativa E (A Marinha do Brasil / Diretoria de Ensino da Marinha aceitou as alternativas "A" e "E" como corretas).

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

15)Num determinado jogo, o apostador recebe, toda vez que ganha, o valor apostado inicialmente, mais 25% do mesmo; e recebe, toda vez que perde, apenas 25% do valor apostado inicialmente. Sabendo-se que foi feita uma aposta inicial de uma quantia x e que foram realizadas quatro jogadas, sempre sendo apostado o valor total obtido na jogada anterior, das quais ganhou-se duas e perdeu-se duas, qual é, aproximadamente,o percentual de x obtido no final?

(A) 3,7 (B) 4,7 (C) 5,7 (D) 6,7 (E) 9,8

Resolução:

Seja "X" o valor inicialmente apostado:

Suponha um dos possíveis modos de como foi jogado, ganhando-se duas vezes e perdendo duas vezes e veremos que tal ordem não é importante:

Suponha que na 1ª Jogada o jogador ganhou, na 2ª Jogada o jogador perdeu, 3ª Jogada o jogador ganhou e na 4ª Jogada o jogador perdeu.

$$A \times 1,25 = B$$
$$B \times 0,25 = C$$
$$C \times 1,25 = D$$
$$D \times 0,25 = E$$
$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{A \times 1,25}_{=B} \times 0,25}_{=C} \times 1,25}_{=D} \times 025}_{=E}$$

$$\Rightarrow A \times 1,25 \times 0,25 \times 1,25 \times 0,25 = A \times \frac{125}{100} \times \frac{25}{100} \times \frac{125}{100} \times \frac{25}{100}$$

$$\Rightarrow A \times \frac{125}{100} \times \frac{25}{100} \times \frac{125}{100} \times \frac{25}{100} = A \times \frac{\overbrace{125}^{5}}{\underbrace{100}_{4}} \times \frac{\overbrace{\cancel{25}}^{1}}{\underbrace{\cancel{100}}_{4}} \times \frac{\overbrace{125}^{5}}{\underbrace{100}_{4}} \times \frac{\overbrace{\cancel{25}}^{1}}{\underbrace{\cancel{100}}_{4}}$$

$$\Rightarrow A \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{5}{4} \times \frac{1}{4} = A \times \frac{25}{256} = A \times 0,098 = A \times \frac{9,8}{100} = A \times 9,8\%$$

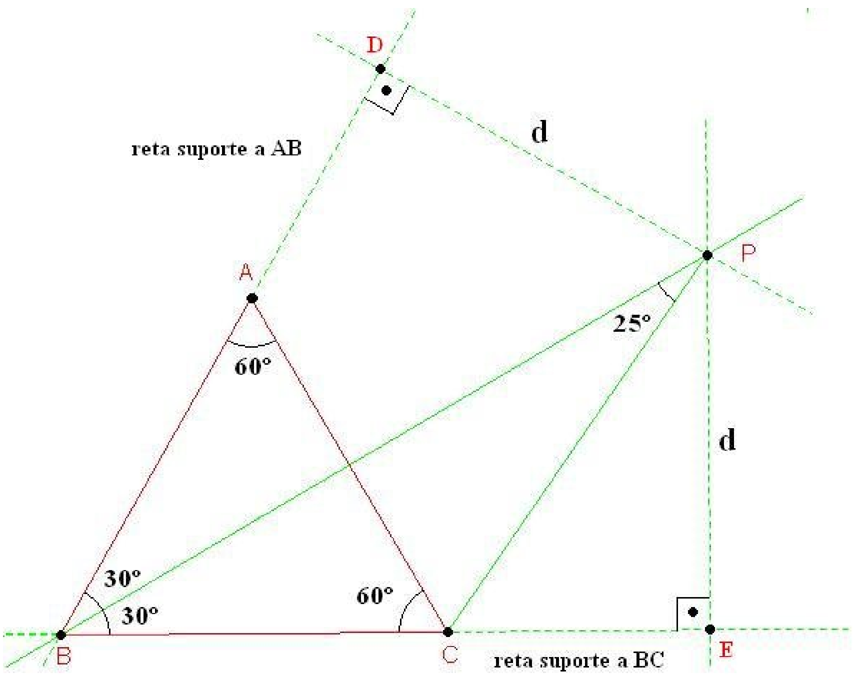
Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

16) Considere um triângulo acutângulo ABC, e um ponto P coplanar com ABC. Sabendo-se que P é eqüidistante das retas suportes de AB e de BC e que o ângulo BPC tem medida igual a 25º, pode-se afirmar que um dos ângulos de ABC mede:
(A) 25º (B) 45º (C) 50º (D) 65º (E) 85º

Resolução: ANULADA (A Marinha do Brasil / Diretoria de Ensino da Marinha anulou a questão).

Claramente está faltando algum dado, pois como está o problema podemos construir qualquer triângulo acutângulo no qual cada resposta estaria correta, mas vamos dar um contra-exemplo de um triângulo eqüilátero que obviamente é acutângulo, veja a figura abaixo.



Obs: para um ponto "P" ser eqüidistante dos lados ou das retas suportes dos lados, tem que pertencer à bissetriz interna do ângulo compreendido entre os lados ou pertencer ao ângulo compreendido entre o prolongamento de um dos lados (reta suporte) e o outro lado, isto é, a bissetriz externa. Assim temos duas bissetrizes a considerar a interna e a externa.

Seja "P" um ponto na bissetriz interna do ângulo ABC de tal maneira que o ângulo BPC seja igual a 25º, por ser eqüilátero o triângulo ABC, temos que BP é mediana, altura e mediatriz.

Observe que os triângulos BDP e BEP são congruentes e em particular os lados DP e EP são congruentes, ou seja, o ponto "P" é eqüidistante dos lados ou das retas suportes dos lados.

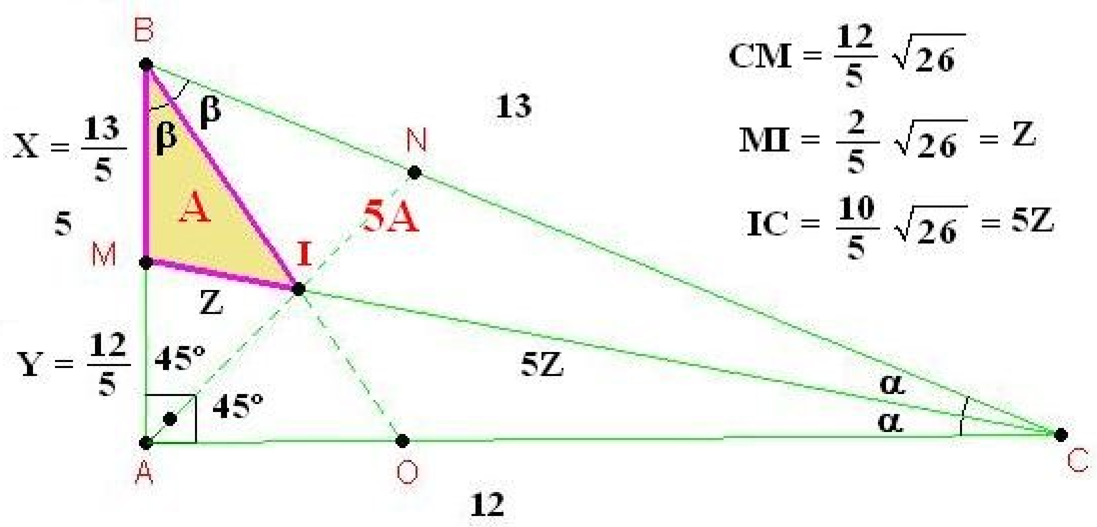
Logo, temos todas as condições do problema satisfeitas, mas nenhuma alternativa do problema corresponde a um ângulo do triângulo ABC.

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

17) Seja ABC um triângulo retângulo com catetos $AC = 12$ e $AB = 5$. A bissetriz interna traçada de C intersecta o lado AB em M. Sendo I o incentro de ABC, a razão entre as áreas de BMI e ABC é:

$(A)\frac{1}{50}$ $(B)\frac{13}{60}$ $(C)\frac{1}{30}$ $(D)\frac{13}{150}$ $(E)\frac{2}{25}$

Resolução:



O lado $BC^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow BC = 13$ (teorema de Pitágoras)

Cálculo de X e Y pelo teorema da bissetriz interna:

$$\Rightarrow X = \frac{5\times 13}{12+13} \Rightarrow X = \frac{\cancel{5}\times 13}{\underbrace{\cancel{25}}_{5}} \Rightarrow X = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{5\times 12}{12+13} \Rightarrow Y = \frac{\cancel{5}\times 12}{\underbrace{\cancel{25}}_{5}} \Rightarrow Y = \frac{12}{5}$$

$$CM^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + 12^2 \Rightarrow CM^2 = \frac{144}{25} + 144 \Rightarrow CM^2 = 144\left(\frac{1}{25}+1\right) \Rightarrow CM^2 = 144 \times \frac{26}{25}$$

$$\Rightarrow CM^2 = \frac{144}{25}\times 26 \Rightarrow CM = \sqrt{\frac{144}{25}\times 26} \Rightarrow CM = \frac{12}{5}\sqrt{26}$$

$$MI = \frac{\frac{13}{5}\times\frac{12}{5}\sqrt{26}}{\frac{13}{5}+13} \Rightarrow MI = \frac{\frac{13}{5}\times\frac{12}{\cancel{5}}\sqrt{26}}{\frac{13+65}{\cancel{5}}} \Rightarrow MI = \frac{\frac{13}{5}\times\overbrace{\cancel{12}}^{2}\sqrt{26}}{\underbrace{\cancel{78}}_{13}} \Rightarrow MI = \frac{\frac{\cancel{13}}{5}\times 2\sqrt{26}}{\cancel{13}}$$

$$\Rightarrow MI = \frac{2\sqrt{26}}{5} \Rightarrow IC = \frac{10\sqrt{26}}{5} \Rightarrow IC = 5\times MI$$

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

A área do triângulo ABC é igual a $S_{ABC} = \frac{5 \times 12}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 30\ u.a$

Observando o triângulo BCM, temos:

$\text{Área}_{\Delta BCM} = \text{Área}_{\Delta BIC} + \text{Área}_{\Delta BMI}$, como os triângulos BIC e BMI possuem a mesma altura e a base IC do ΔBIC é igual a cinco vezes a base MI do ΔBMI

$\Rightarrow \text{Área}_{\Delta BIC} = 5 \times \text{Área}_{\Delta BMI}$

Seja "5A" a área do ΔBIC e "A" a área do ΔBMI (ver figura).

Fazendo a proporção entre as áreas de ABC e BCM, temos:

$$\begin{cases} 30\ u.a & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad 5 \\ S_{BCM} & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \quad \frac{13}{5} \end{cases} \Rightarrow S_{BCM} = \frac{30 \times \frac{13}{5}}{5} \Rightarrow S_{BCM} = \frac{\overbrace{\cancel{30}}^{6} \times \frac{13}{5}}{\cancel{5}}$$

$$\Rightarrow S_{BCM} = \frac{13 \times 6}{5} \Rightarrow S_{BCM} = \frac{78}{5} ua \Rightarrow S_{BCM} = 6A \ \Rightarrow 6A = \frac{78}{5}$$

$$\Rightarrow A = \frac{78}{5 \times 6} \Rightarrow A = \frac{\overbrace{\cancel{78}}^{13}}{5 \times \cancel{6}} \Rightarrow A = \frac{13}{5} \Rightarrow S_{BMI} = \frac{13}{5} ua$$

$$\text{Assim } \frac{S_{BMI}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{13}{5}}{30} \Rightarrow \frac{S_{BMI}}{S_{ABC}} = \frac{13}{5} \times \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{S_{BMI}}{S_{ABC}} = \frac{13}{150}$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

18) Ao dividir-se a fração $3/5$ pela fração $2/3$ encontrou-se $2/5$. Qual é, aproximadamente, o percentual do erro cometido?

(A) 35,55% (B) 45,55% (C) 55,55% (D) 65,55% (E) 75,55%

Resolução:

$$\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{10}$$

O erro cometido foi de $\frac{9}{10} - \frac{2}{5} = \frac{9}{10} - \frac{4}{10} = \frac{5}{10}$

Assim fazendo-se a proporção, temos:

$$\begin{cases} \frac{9}{10} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} 100\% \\ \frac{5}{10} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} X \end{cases} \Rightarrow X = \frac{\frac{5}{10}}{\frac{9}{10}} \times 100\% \Rightarrow X = \frac{5}{\cancel{10}} \times \frac{\cancel{10}}{9} \times 100\% \Rightarrow X = \frac{5}{9} \times 100\%$$

$$X \cong 0,555... \times 100\% \Rightarrow X \cong 55,5\ \%$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

19) A solução de $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}$ no campo dos reais é

(A) o conjunto vazio. (B) $\{1\ 2\}$ (C) $\{-1\ 2,1\ 2\}$

(D) $[12,+\infty[$ (E) $]-\infty,+\infty[$

Resolução:

$$\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}\Rightarrow$$

Inicialmente devemos ter $4x^2-4x+1\geq 0$ e $-1+6x-12x^2+8x^3\geq 0$

$$\Rightarrow\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{4\times\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=2\left(x-\frac{1}{2}\right)=2x-1$$

$$\Rightarrow\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}\Rightarrow 8x^3-12x^2+6x-1\Rightarrow\underbrace{-12x^2+6x}_{-6x(2x-1)}+\underbrace{8x^3-1}_{(2x)^3-1^3}$$

$$\Rightarrow -6x(2x-1)+(2x)^3-1^3\Rightarrow -6x(2x-1)+(2x-1)\left(4x^2+2x+1\right)$$

$$\Rightarrow(2x-1)\times\left(-6x+4x^2+2x+1\right)=(2x-1)\times\left(4x^2-4x+1\right)$$

$$\Rightarrow(2x-1)\times(2x-1)^2=(2x-1)^3\Rightarrow\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}=\sqrt[3]{(2x-1)^3}=2x-1$$

Daí se $\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt[3]{-1+6x-12x^2+8x^3}\Rightarrow\sqrt{(2x-1)^2}=\sqrt[3]{(2x-1)^3}$

Então $2x-1\geq 0\Rightarrow 2x\geq 1\Rightarrow x\geq\frac{1}{2}$

A igualdade será verdadeira se $x\geq\frac{1}{2}$ ou $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

20) Uma expressão constituída por números de dois algarismos é do tipo $\square\square \times \square\square - \square\square$, no qual cada quadrinho deve ser ocupado por um algarismo, num total de seis algarismos para toda a expressão. Sabendo-se que os algarismos que preencherão os quadrinhos são todos distintos, o menor valor possível para toda a expressão é (Observação: números do tipo 07 são considerados de um algarismo)

(A) 123 (B) 132 (C) 213 (D) 231 (E) 312

Resolução:

PRIMEIRA SOLUÇÃO:

É claro que o maior valor possível a ser tirado para termos o menor valor é o número $\boxed{9}\boxed{8}$, que é o maior número de dois algarísmos DISTINTOS.

Assim, para o produto $\boxed{A}\boxed{B} \times \boxed{C}\boxed{D}$ ser o menor possível, temos que pegar o menor número de dois algarísmos DISTINTOS e multiplicar pelo menor número de dois algarísmos DISTINTOS formado pelos algarísmos NÃO UTILIZADOS, isto é:

$\boxed{1}\boxed{0} \times \boxed{2}\boxed{3} = 230$

Daí $\boxed{1}\boxed{0} \times \boxed{2}\boxed{3} - \boxed{9}\boxed{8} = 230 - 98 = 132$

SEGUNDA SOLUÇÃO:

É claro que o maior valor possível a ser tirado para termos o menor valor é o número 98,

Pegando as respostas, temos:

A) 123 $\Rightarrow 123 + 98 = 221 \Rightarrow 221 = 13 \times 17$ não serve

B) 132 $\Rightarrow 132 + 98 = 230 \Rightarrow 230 = 10 \times 23$ serve

C) 213 $\Rightarrow 213 + 98 = 311 \Rightarrow$ é primo

D) 231 $\Rightarrow 231 + 98 = 329 \Rightarrow 329 = 7 \times 47$ não serve

E) 312 $\Rightarrow 312 + 98 = 410 \Rightarrow 410 = 10 \times 41$ não serve

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006