RESOLUÇÃO DA PROVA DO COLÉGIO NAVAL DE 2006 (PROVA VERDE):

1) Observe o sistema de equações lineares abaixo.

$$S_1:\begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=12 \\ 2x+7y=4 \end{cases}$$

Sendo $(x_1,y_1)$ solução de $S_1$, o resultado de $(6+\sqrt{2})x_1+(21+\sqrt{3})y_1$ é igual a

a) 18 b) 21 c)24 d) 28 e)32

Resolução:

$$\begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=12 \\ 2x+7y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=12 \\ 2x+7y=4 \quad \times(3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{2}+y\sqrt{3}=12 \\ 6x+21y=12 \end{cases}$$

*Somando-se membro a membro, vem:*

$$6x + x\sqrt{2} + 21y + y\sqrt{3}=12 \Rightarrow \left(6+\sqrt{2}\right)x+\left(21+\sqrt{3}\right)y=24$$

$$\Rightarrow para\ (x_1,\ y_1) \Rightarrow \left(6+\sqrt{2}\right)x_1+\left(21+\sqrt{3}\right)y_1=24$$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

2)A expressão $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{23*4}}{8}$ determina as raízes do trinômio $ax^2+bx+c$, de coeficientes inteiros positivos e raízes racionais. Sabendo-se que o símbolo * está substituindo um algarismo, qual é o menor valor numérico para esse trinômio?

a) -72 b) -144 c) -172 d) -288 e) -324

Resolução:

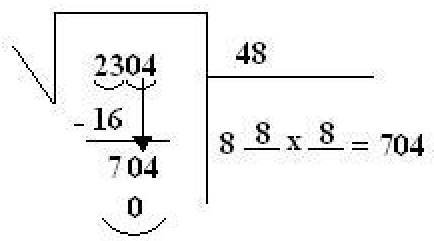
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{23*4}}{8} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2\text{a}}$$

$$\Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$\textit{Menor valor numérico} \Rightarrow \textit{ponto de mínino}$$

$$\textit{Vértice é igual } V = \left(\frac{-\Delta}{4a};\frac{-b}{2a}\right) \Rightarrow \Delta = 23*4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{23*4} \Rightarrow \text{testando "*"} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{2304} \Rightarrow \textit{tem que ser racional}$$




$$\textit{Assim } y_{vértice} = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_{vértice} = \frac{-2304}{4 \cdot 4} \Rightarrow y_{vértice} = \frac{-2304}{16} \Rightarrow y_{vértice} = -144$$

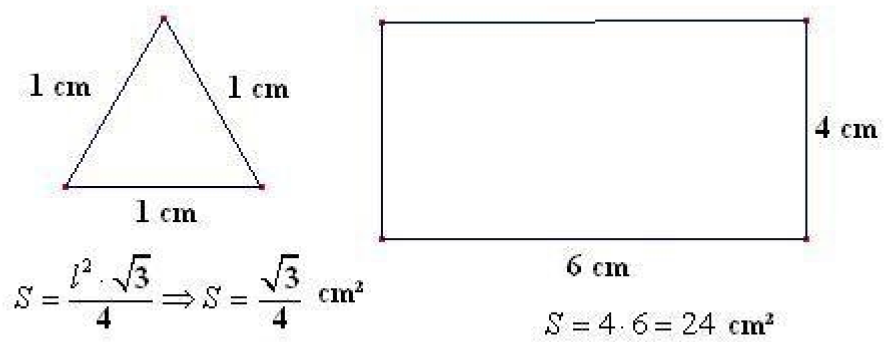
Alternativa B


Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

3) Em lugar do quadrado de lado igual a 1 (um) centímetro, tomou-se como unidade de área o triângulo eqüilátero de lado igual a 1(um) centímetro. Qual será, nessa nova unidade, o número que expressará a área de um retângulo de base igual a 6 (seis) centímetros e altura igual a 4 (quatro) centímetros ?

a) 24 b) $6\sqrt{3}$ c) $18\sqrt{3}$ d) $24\sqrt{3}$ e) $32\sqrt{3}$

Resolução:




$\frac{\sqrt{3}}{4} cm^2$ ___________ *uma* ua

$24\ cm^2$ ___________ $x$

$$\Rightarrow x = \frac{24\cancel{cm^2}}{\sqrt{3}/4\ \cancel{cm^2}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{24}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow x = 24 \times \frac{4}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 24 \times \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 24 \times \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \overset{8}{\cancel{24}} \times \frac{4\sqrt{3}}{\cancel{3}}$$

$$\Rightarrow x = 8 \times 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 32\sqrt{3} \text{ ua}$$

*Obs* : ua - unidade de área

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

4) Uma criação de 12 aves tipo A consome um saco de ração K em exatamente 30 dias e uma criação de 6 aves tipo B consome um saco de ração K, igual ao primeiro, em exatamente 10 dias. Inicialmente, tem-se um saco de ração K para cada um dos tipos de aves mencionados. No fim do quinto dia, a ração disponível para as aves de tipo B estragou-se, obrigando a distribuição de toda a ração restante para os dois tipos de aves. Assim sendo, quantos dias inteiros vai durar a ração restante para alimentar todos os animais na forma regular?

a) Cinco. b) Seis. c) Sete d) Oito. e) Nove.

12 aves do tipo A ___________ 1 saco de ração K _________ 30 dias

6 aves do tipo B ___________ 1 saco de ração K _________ 10 dias

Como no 5º dia a ração das aves do tipo B se estragou, temos que:

12 aves do tipo A ___________ 1 saco de ração K _________ 30 dias

12 aves do tipo A ___________ $\frac{1}{30}$ saco de ração K _________ 1 dia

12 aves do tipo A ___________ $\frac{5}{30}$ saco de ração K _________ 5 dias

Logo resta $\frac{25}{30}$ do saco de ração K para as aves do tipo A e B se alimentarem, como:

6 aves do tipo B ___________ 1 saco de ração K _________ 10 dias

6 aves do tipo B ___________ 3 sacos de ração K _________ 30 dias

6 aves do tipo B ___________ $\frac{3}{30}$ saco de ração K _________ 1 dia

Logo as aves dos tipos A e B juntas irão consumir em um dia:

12 aves do tipo A ___________ $\frac{1}{30}$ saco de ração K _________ 1 dia

6 aves do tipo B ___________ $\frac{3}{30}$ saco de ração K _________ 1 dia

Somando-se membro a membro, vem:

$\Rightarrow$ 18 aves do tipo A e B ___________ $\frac{4}{30}$ saco de ração K _________ 1 dia

$$Assim\ \frac{25/30}{4/30} \Rightarrow \frac{25/\cancel{30}}{4/\cancel{30}} \Rightarrow \frac{25}{4} = 6,25\ dias$$

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

5) Com a finalidade de se pesquisar a renda média em reais M da sua população, uma determinada região S foi dividida em quatro setores: X, Y, Z e W, com, respectivamente, 2.550, 3.500, 3.750 e 4.200 pessoas. Observou-se, então, que a renda média em reais de X é de 800,00, a de Y é de 650,00 a de Z é de 500,00 e a de W é de 450,00. Logo

a) 605,00 < M < 615,00 b) 595,00 < M < 605,00 c) 585,00 < M < 595,00

d) 575,00 < M < 585,00 e) 565,00 < M < 575,00

Trata-se de um problema que envolve o conceito de média ponderada.

$$M_p = \frac{a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 + \cdots + a_{n-2} \cdot p_{n-2} + a_{n-1} \cdot p_{n-1} + a_n \cdot p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{n-2} + p_{n-1} + p_n}$$

$onde: \ p_1,\ p_2,\ p_3, \cdots, p_{n-2},\ p_{n-1},\ p_n$ *são os pesos*

$$M_p = \frac{2550 \cdot 800 + 3500 \cdot 650 + 3750 \cdot 500 + 4200 \cdot 450}{2550 + 3500 + 3750 + 4200}$$

$$M_p = \frac{255\cancel{0} \cdot 8\cancel{0}\cancel{0} + 35\cancel{0}\cancel{0} \cdot 65\cancel{0} + 375\cancel{0} \cdot 5\cancel{0}\cancel{0} + 42\cancel{0}\cancel{0} \cdot 45\cancel{0}}{14\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}}$$

$$M_p = \frac{255 \cdot 8 + 35 \cdot 65 + 375 \cdot 5 + 42 \cdot 45}{14}$$

$$M_p = \frac{2040 + 2275 + 1875 + 1890}{14}$$

$$M_p = \frac{8080}{14} \Rightarrow M_p \cong 577{,}14$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

6) Sendo $y = \dfrac{x + a}{x + b}$, qual é o valor numérico de y para $x = \sqrt{2}$, sabendo-se que, para todo número real $x \neq -b$, $y \cdot (x^2 - 2) = x^2 + \sqrt{2}\,x - 4$ ?

a)0 b)0,5 c)0,666... d)1,5 e)2

$$y\cdot\left(x^2-2\right)=x^2+\sqrt{2}-4 \Rightarrow y=\frac{\left(x^2+\sqrt{2}-4\right)}{x^2-2} \Rightarrow para\ x=\sqrt{2}$$

$$y=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-4}{\left(\sqrt{2}\right)^2-2} \Rightarrow y=\frac{2+2-4}{2-2} \Rightarrow y=\frac{0}{0}\ \text{indeterminado}$$

$$\text{Mais}\quad y=\frac{\left(x^2+\sqrt{2}-4\right)}{x^2-2} \Rightarrow y=\frac{\left(x^2+\sqrt{2}-4\right)}{x^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{\cancel{\left(x-\sqrt{2}\right)}\cdot\left(x+2\sqrt{2}\right)}{\cancel{\left(x-\sqrt{2}\right)}\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)}$$

$$\Rightarrow y=\frac{x+2\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\quad para\ \ x=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} \Rightarrow y=\frac{3\cancel{\sqrt{2}}}{2\cancel{\sqrt{2}}} \Rightarrow y=\frac{3}{2} \Rightarrow y=1{,}5$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

7) O litro do combustível X custa R$ 2,00 e do combustível Y, R$ 3,00. O tanque do veículo V, que se move indiferentemente com os combustíveis X e Y, tem capacidade total de 54 litros. O veículo V, quando abastecido unicamente com o combustível X, tem rendimento de 15 quilômetros por litro e, quando abastecido unicamente com o combustível Y, tem rendimento de 18 quilômetros por litro. Quantos reais gastará o proprietário de V, caso resolva abastecer completamente o seu tanque com uma mistura desses combustíveis, de forma que, numericamente, os volumes correspondentes de X e Y sejam, simultaneamente, diretamente proporcionais aos rendimentos e inversamente proporcionais aos custos de cada um deles ?

a) 131,00 b) 132,00 c) 133,00 d) 134,00 e) 135,00

$$\begin{cases} V_x + V_y = 54 \\ \dfrac{V_x}{V_y} = \dfrac{15}{18} \times \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x + V_y = 54 \\ \dfrac{V_x}{V_y} = \dfrac{15}{\underbrace{\cancel{18}}_{6}} \times \dfrac{\cancel{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x + V_y = 54 \\ \dfrac{V_x}{V_y} = \dfrac{\overbrace{\cancel{15}}^{5}}{\underbrace{\cancel{6}}_{2}} \times \dfrac{\cancel{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_x + V_y = 54 \\ \dfrac{V_x}{V_y} = \dfrac{5}{4} \Rightarrow 4 \cdot V_x = 5 \cdot V_y \end{cases}$$

$$mas\ de\ 4V_x = 5V_y\ e\ de\ V_x + V_y = 54 \Rightarrow 5V_x + 5V_y = 270 \Rightarrow 5V_x + 4V_y = 270$$

$$\Rightarrow 9V_x = 270 \Rightarrow V_x = \frac{270}{9} \Rightarrow V_x = 30 \quad \therefore \quad V_y = 24$$

*Logo o gasto será:*

$$Gasto = 30 \times 2 + 24 \times 3 \Rightarrow Gasto = 60 + 72 \Rightarrow Gasto = 132$$

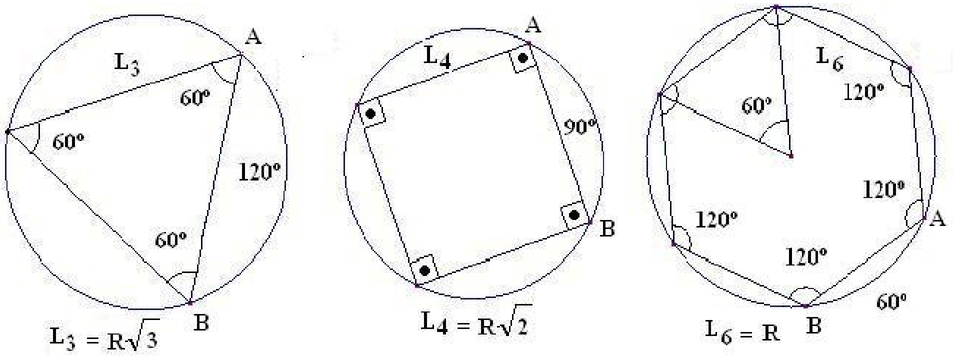
Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarloslloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

8) Qual é o perímetro de um quadrilátero convexo inscrito em uma circunferência de raio unitário, sabendo-se que foi construído utilizando-se, pelo menos uma vez e somente, os lados do triângulo eqüilátero, quadrado e hexágono regular inscritos nessa circunferência?

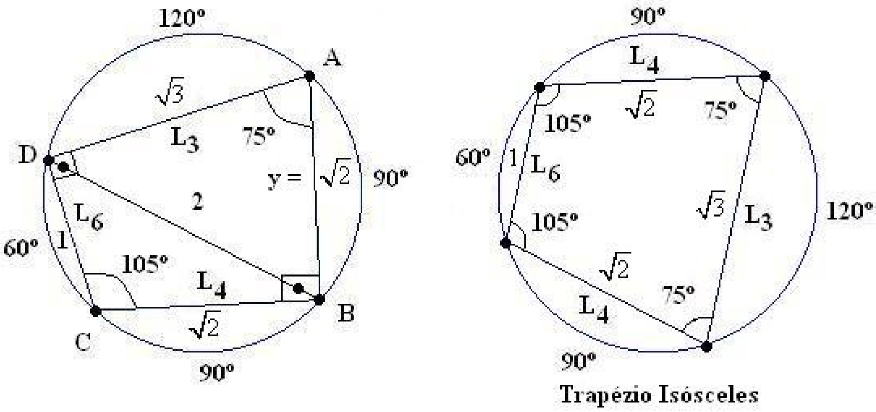
a) $\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$ b) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1$ c) $2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1$

d) $\sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 2$ e) $2(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$




Observem que nesse problema cada lado do triângulo eqüilátero ocupa um arco igual a 120º, cada lado do quadrado ocupa um arco igual a 90º e cada lado do hexágono regular ocupa um arco de 60º, assim sendo, como a circunferência toda possui 360º, temos 120º + 90º + 60º = 270º, restando 90º, logo para formar o quadrilátero, esse lado que falta ocupará necessariamente 90º, assim sendo esse lado é o lado do quadrado, temos dois casos, mas o perímetro não vai mudar e será igual a $2P = \sqrt{3} + \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} \Rightarrow 2P = \sqrt{3} + 2\sqrt{2} + 1$.

Veja abaixo os dois casos, que levam ao mesmo perímetro:




Alternativa B


Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

9) Quantos são os números primos maiores que 100 e menores que 200, nos quais o algarismo das dezenas é par e maior do que o das unidades ?

a) Um. b) Dois. c) Três. d) Quatro. e) Cinco.

Um bom teste para números “pequenos” , é dividir "n" por todos os números primos menores ou iguais a raiz quadrada exata ou aproximada de "n".
Se nenhum desses primos dividir exatamente o número "n", então "n" é primo.

$Candidatos:$

$121 \Rightarrow divisível\ por\ 11$

$141-143 \Rightarrow 141\ divisível\ por\ 3\ \ e\ \ 143\ divisível\ por\ 11$

$161-163 \Rightarrow 161\ divisível\ por\ 3\ \ e\ \ 163\ é\ primo$

$181-183-187\ \ \Rightarrow 181\ é\ primo,\ 183\ divisível\ por\ 3\ \ e\ \ 187\ divisível\ por\ 11$

O número 163 é primo, pois $\sqrt{163} \cong 12,$ assim temos que dividi-lo pelos números primos menores que doze, isto é, 2, 3, 5, 7 e 11, fazendo isso vemos que 163 é primo. Essa verificação é imediata para 2, 3, 5 e 11, por sete basta ver que:
163 = 140 + 21 +3 o que indica que 163 não é divisível por sete.

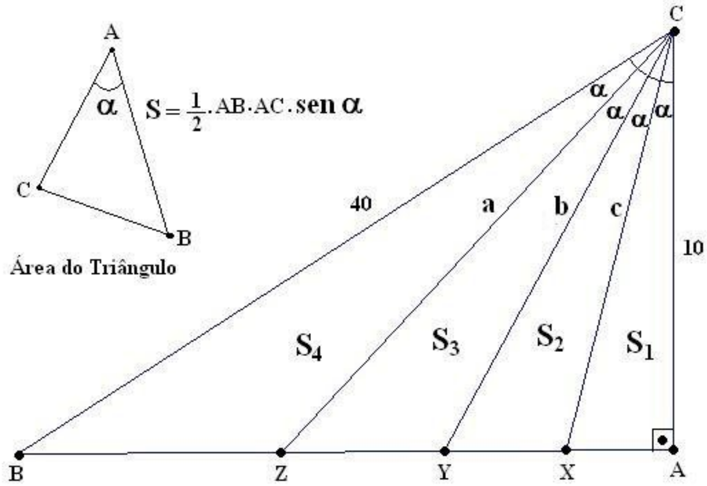
O número 181 é primo, pois $\sqrt{181} \cong 13,$ assim temos que dividi-lo pelos números primos menores ou iguais a treze, isto é, 2, 3, 5, 7, 11 e 13, fazendo isso vemos que 163 é primo. Essa verificação é imediata para 2, 3, 5, 11, por sete basta ver que: 181 = 140 + 35 + 6 o que indica que 163 não é divisível por sete. Do mesmo modo 181 = 130 + 39 + 12 não é divisível por treze.

Alternativa B

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

10) Em um triângulo retângulo ABC, o cateto AC e a hipotenusa BC medem, respectivamente, 10 e 40. Sabe-se que os segmentos CX, CY e CZ dividem o ângulo ACB em quatro ângulos de medidas iguais, e que AX, XY, YZ e ZB são segmentos consecutivos contidos internamente no segmento AB. Se $S_1$, $S_2$, $S_3$ e $S_4$ são, respectivamente, as áreas dos triângulos CAX, CXY, CYZ e CZB, qual será o valor da razão $\frac{S_1S_3}{S_2S_4}$?

a) 0,25 b) 0,5 c) 0,75 d)1 e) 1,25




Resolvendo o problema segundo o enunciado, com auxilio das figuras acima, temos:

$$S_1 = \frac{10 \times c \times sen\alpha}{2}$$

$$S_2 = \frac{c \times b \times sen\alpha}{2}$$

$$S_3 = \frac{a \times b \times sen\alpha}{2}$$

$$S_4 = \frac{a \times 40 \times sen\alpha}{2}$$

$$\frac{S_1 \times S_3}{S_2 \times S_4} = \frac{\left(\frac{10 \times \cancel{c} \times \cancel{sen\alpha}}{\cancel{2}}\right) \times \left(\frac{\cancel{a} \times \cancel{b} \times \cancel{sen\alpha}}{\cancel{2}}\right)}{\left(\frac{\cancel{c} \times \cancel{b} \times \cancel{sen\alpha}}{\cancel{2}}\right) \times \left(\frac{\cancel{a} \times 40 \times \cancel{sen\alpha}}{\cancel{2}}\right)} \Rightarrow \frac{S_1 \times S_3}{S_2 \times S_4} = \frac{1\cancel{0}}{4\cancel{0}} \Rightarrow \frac{S_1 \times S_3}{S_2 \times S_4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

11) Simplificando-se a fração $\frac{x(x^2 + x - y) + y^2(y + 1)}{x^2 + y^2 - xy}$, com $x^2 + y^2 - xy \neq 0$, obtém-se

a) $x - y + 1$ b) $x - y - 1$ c) $x + y - 1$ d) $1 + x + y$ e) $1 - x + y$

Resolução:

$$\frac{x\cdot\left(x^2+x-y\right)+y^2\cdot\left(y+1\right)}{x^2+y^2-xy}$$

Resolvendo o numerador, temos:

$$x\cdot\left(x^2+x-y\right)+y^2\cdot\left(y+1\right)=x^3+x^2-xy+y^3+y^2=x^3+y^3+x^2+y^2-xy$$

$$\Rightarrow\left(x^3+y^3\right)+\left(x^2+y^2-xy\right)=\left(x+y\right)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)+\left(x^2-xy+y^2\right)$$

$$\Rightarrow\left(x^2-xy+y^2\right)\cdot\left[\left(x+y\right)+1\right]=\left(x^2-xy+y^2\right)\cdot\left(x+y+1\right)$$

*Assim*:

$$\frac{x\cdot\left(x^2+x-y\right)+y^2\cdot\left(y+1\right)}{x^2+y^2-xy}=\frac{\cancel{\left(x^2-xy+y^2\right)}\cdot\left(x+y+1\right)}{\cancel{\left(x^2-xy+y^2\right)}}=x+y+1$$

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

12) Observe o dispositivo abaixo.

| | |
|---|---|
| N | x |
| x | x |
| x | x |
| x | x |
| 1 | |

No dispositivo ao acima, tem-se a decomposição tradicional em fatores primos de um número natural N, em que a letra x está substituindo qualquer número natural diferente de N, zero e um. Sendo y o número total de divisores naturais de N, quantos são os valores possíveis para y ?

a) Três. b) Quatro. c) Cinco. d) Seis. e) Sete.

Refazendo o Dispositivo Prático, de uma maneira para melhor entendimento do problema, vem:

Refazendo o Dispositivo, temos:

| | |
|---|---|
| N | x1 |
| a | x2 |
| b | x3 |
| c | x4 |
| 1 | |

Desse modo temos cinco casos a considerar, isto é:

Um número "N" decomposto em fatores primos é igual a:

$\mathrm{N} = x_1^{\,a} \cdot x_2^{\,b} \cdot x_3^{\,c} \cdot x_4^{\,d} \cdots x_4^{\,z}$ , o número de divisores de N será dado por

$nd = (a+1)\cdot(b+1)\cdot(c+1)\cdot(d+1)\cdots(z+1)$

1º caso: Todos Diferentes

$Se\ \ x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_4 \Rightarrow \mathrm{N} = x_1^{\,1}\cdot x_2^{\,1}\cdot x_3^{\,1}\cdot x_4^{\,1} \Rightarrow\ nd = (1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1) = 2^4 = 16$ divisores

2º caso: Dois Iguais

$Se\ \ x_1 \neq x_2 \neq x_3 = x_4 \Rightarrow \mathrm{N} = x_1^{\,1}\cdot x_2^{\,1}\cdot x_3^{\,2} \Rightarrow nd = (1+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 12$ divisores

3º caso: Dois pares iguais

$Se\ \ x_1 = x_2\ e\ x_3 = x_4 \Rightarrow \mathrm{N} = x_1^{\,2}\cdot x_3^{\,2} \Rightarrow nd = (2+1)\cdot(2+1) = 9$ divisores

4º caso: Três iguais

$Se\ \ x_1 = x_2 = x_3 \neq x_4 \Rightarrow \mathrm{N} = x_1^{\,3}\cdot x_4^{\,1} \Rightarrow nd = (3+1)\cdot(1+1) = 8$ divisores

5º caso: Todos iguais

$Se\ \ x_1 = x_2 = x_3 = x_4 \Rightarrow \mathrm{N} = x_1^{\,4} \Rightarrow nd = (4+1) = 5$ divisores

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

**13)** O resultado da expressão $(18700^2 + 20900^2):(18700 \times 20900)$ é aproximada-mente igual a

a) 2,01 b) 2,03 c) 2,05 d) 2,07 e) 2,09

Resolvendo:

$$\frac{18700^2 + 20900^2}{18700 \times 20900} =$$

Temos que:

$$18700 = 187 \times 100 = 17 \times 11 \times 10^2$$

$$20900 = 209 \times 100 = 19 \times 11 \times 10^2$$

Então:

$$\frac{18700^2 + 20900^2}{18700 \times 20900} = \frac{\left(17 \times 11 \times 10^2\right)^2 + \left(19 \times 11 \times 10^2\right)^2}{\left(17 \times 11 \times 10^2\right) \times \left(19 \times 11 \times 10^2\right)} = \frac{17^2 \times 11^2 \times 10^4 + 19^2 \times 11^2 \times 10^4}{\left(17 \times 11 \times 10^2\right) \times \left(19 \times 11 \times 10^2\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{11^2} \times \cancel{10^4}\left(17^2 + 19^2\right)}{\cancel{11^2} \times \cancel{10^4} \times 17 \times 19} = \frac{17^2 + 19^2}{17 \times 19} = \frac{17^2}{17 \times 19} + \frac{19^2}{17 \times 19} = \frac{17}{19} + \frac{19}{17} = 0{,}895 + 1{,}118 = 2{,}013$$

Alternativa A

14) Qual é a solução, no conjunto dos números reais, da equação $\sqrt{\frac{1 - x}{2}} = x$ ?

a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = -1$ c) $x = 1$ d) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$ e) $x = -\frac{1}{2}$

Resolvendo:

$$se\ \sqrt{\frac{1-x}{2}} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{1-x}{2}} = x \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)^2 = x^2 \Rightarrow \frac{1-x}{2} = x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 - x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1\ e\ x_2 = \frac{1}{2}\ \text{pelas condições do problema}\ x_1 = -1\ \text{não serve}$$

Alternativa A

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

15) Se $x = 7^{200}$, $y = 1024^{40} \cdot 3^{100}$ e $z = 16^{25} \cdot 625^{50}$, pode-se afirmar que

a) x < y < z b) x < z < y c) y < x < z d) y < z < x e) z < x < y

$$x = 7^{200} = \left(7^2\right)^{100} = 49^{100}$$

$$y = 1024^{40} \times 3^{100} = \left(2^{10}\right)^{40} \times 3^{100} = \left(2\right)^{400} \times 3^{100} = \left(2^4\right)^{100} \times 3^{100} = 16^{100} \times 3^{100} = 48^{100}$$

$$z = 16^{25} \times 625^{50} = \left(2^4\right)^{25} \times \left(5^4\right)^{50} = 2^{100} \times 5^{200} = 2^{100} \times \left(5^2\right)^{100} = 2^{100} \times 25^{100} = 50^{100}$$

Assim, temos que:

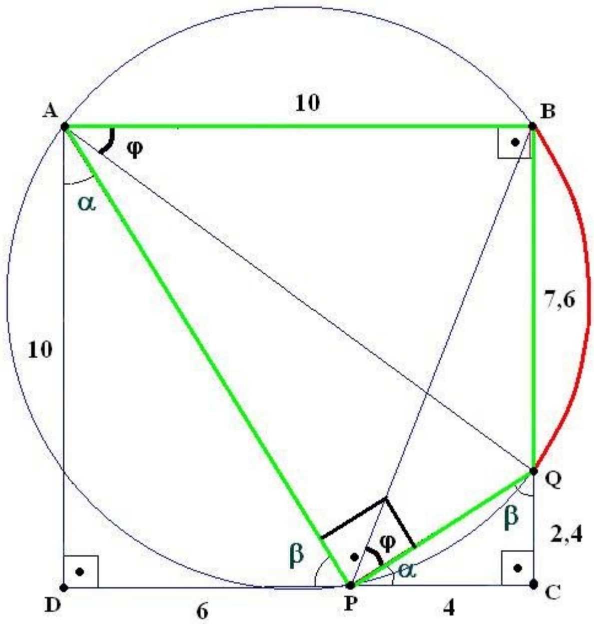
$Y < X < Z$

Alternativa C

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

16) Em um quadrado ABCD de lado 10, toma-se internamente sobre o lado CD o ponto P, que dista 4 do vértice C, e internamente sobre o lado BC, o ponto Q, de modo que os triângulos ADP e PCQ sejam semelhantes, com o segmento CQ menor possível. Nessas condições, o ângulo BAQ será igual ao ângulo

a) APB b) PAQ c) PAC d) BPQ e) AQP




Fazendo a figura conforme o enunciado, temos:

Para os triângulos ADP e PCQ serem semelhantes, temos dois casos a considerar:

1º Caso: $\dfrac{AB}{PC} = \dfrac{DP}{QC} \Rightarrow \dfrac{10}{4} = \dfrac{6}{QC} \Rightarrow QC = \dfrac{24}{10} \Rightarrow QC = 2,4$

2º Caso: $\dfrac{AB}{QC} = \dfrac{DP}{PC} \Rightarrow \dfrac{10}{QC} = \dfrac{6}{4} \Rightarrow QC = \dfrac{40}{6} \Rightarrow QC \cong 6,6$

Como pelo problema QC deve ser o menor possível, então QC = 2,4.

Em particular, $C\hat{P}Q \equiv D\hat{A}P = \alpha$, assim, observando a a figura podemos concluir que:

$A\hat{P}Q = 90º$, logo o quadrilátero ABCP é inscritível, pois possui um par de ângulos opostos iguais a 90º, então os ângulos $B\hat{A}Q$ e $B\hat{P}Q$ são congruentes, isto é, $B\hat{A}Q \equiv B\hat{P}Q = \dfrac{\overset{\frown}{BQ}}{2}$.

Alternativa D

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

17) Observe os conjuntos A = {3,{3},5,{5}} e B = {3,{3,5},5}. Sabendo-se que n(X) representa o número total de elementos de um conjunto X, e que P(X) é o conjunto formado por todos os subconjuntos do conjunto X, pode-se afirmar que

a) $n(A \cap B) = 3$ b) $n(A \cup B) = 7$ c) $n(A - B) = 2$

d) $n(P(A)) = 32$ e) $n(P(B)) = 16$

Resolvendo:

$$a) A \cap B = \{3,\ 5\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$b) A \cup B = \{3,\ 5,\ \{3\},\ \{5\},\ \{3,\ 5\}\} \Rightarrow n(A \cup B) = 5$$

$$c) A - B = \{\{3\},\ \{5\}\} \Rightarrow n(A - B) = 2$$

$$d) P(A) = 2^4 = 16 \text{ elementos } n(P(A)) = 16$$

$$e) P(B) = 2^3 = 8 \text{ elementos } n(P(B)) = 8$$

Alternativa C

18) Uma instituição financeira abaixou a sua taxa de juros de 2,5% para 2,0%. Assinale a opção que apresenta, em percentagem, a redução sobre a taxa inicial.

a) 0,5 b) 5 c) 7,5 d) 15 e) 20

Resolvendo:

Uma pessoa que tomou R$ 100,00 por empréstimo pagará:

$$100,00 \times 1,025 = 102,5 \text{ ou seja } 2,5 \text{ reais de júros}$$

Essa pessoa se tivesse pego os R$ 100,00 após a taxa de júros ter baixado ela pagaria:

$$100,00 \times 1,020 = 102 \text{ ou seja } 2 \text{ reais de júros, uma redução de } 50 \text{ centavos}$$

Então a taxa de redução foi de:

$$2,5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 100\%$$

$$0,5 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ x$$

$$x = \frac{0,5 \cdot 100\%}{2,5} \Rightarrow x = \frac{\cancel{0,5} \cdot 100\%}{\underbrace{\cancel{2,5}}_{5}} \Rightarrow x = \frac{100\%}{5} \Rightarrow x = 20\%$$

Alternativa E

Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

19) O produto de dois números reais x e y é igual a 150. Assim sendo, x + y NÃO pode ser igual a

a) 31,71 b) 28,27 c) 25,15 d) 24,35 e) -26,94

Resolvendo:

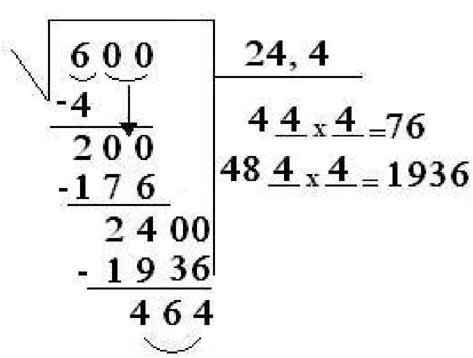
$x \times y = 150$

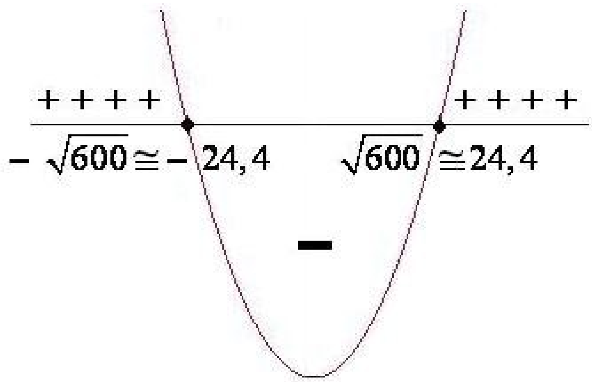
$x + y = ?$

Utilizando a fórmula $x^2 - Sx + P = o,$ onde $S$ e $P$ são a soma e o produto das raízes da equação do 2º grau, temos:

$x^2 - Sx + 150 = o$ como $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \Rightarrow \Delta = (-S)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 150 \Rightarrow \Delta = S^2 - 600 \Rightarrow$

$\Delta \geq 0$ (pois os números são reais), logo $S^2 - 600 \geq 0$



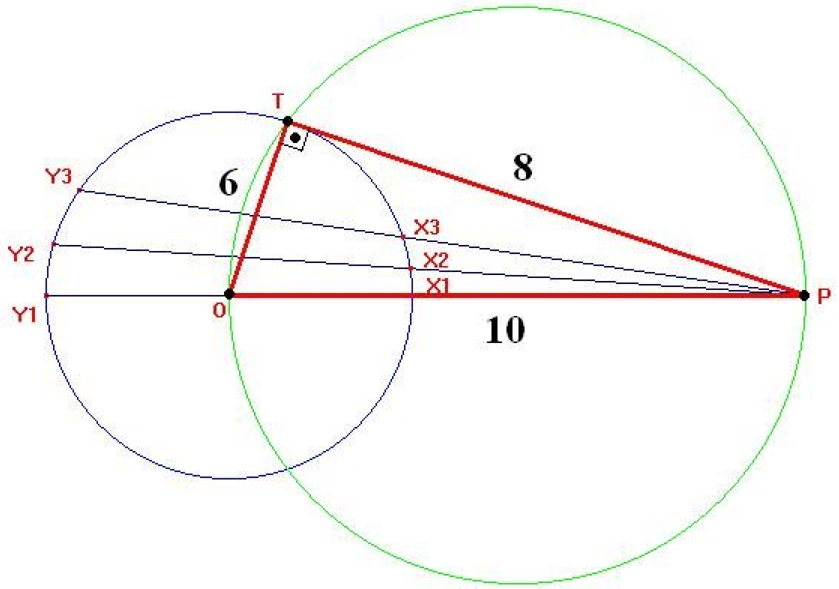

Daí, S ≥ 24, 4 ou S ≤ – 24, 4

Alternativa D


Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006

20 De um ponto P exterior a um círculo de raio 6, traçam-se secantes PXY (PX<PY), X e Y pontos variáveis pertencentes à circunferência desse círculo. Os pontos médios das cordas XY descrevem um arco de circunferência de raio R. Assim sendo, qual será o valor de R, sabendo-se que a tangente PT ao círculo mede 8 ?

a)5 b)6 c) $4\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{3}$ e) 10




Conforme o enunciado TO = 6 e PT = 8, assim PO = 10 (triângulo pitagórico).

Para construir a tangente PT, temos que construir a circunferência que tem como diâmetro o segmento PO, ou como raio = $\frac{PO}{2} = \frac{10}{2} = 5$, logo encontraremos o ponto T da tangente PT (teorema de Tales), ângulo inscrito igual a 90º, logo R=5.

OBS: Para essa questão a Marinha do Brasil divulgou o Gabarito Oficial como sendo a alternativa A, porém, após os recursos a Marinha do Brasil divulgou a alternativa E também como correta.

Resposta: Alternativas A e E.


Prof. Carlos Loureiro
Formado Matemática -UFF – Niterói/RJ
Curso de Capacitação Permanente para Professores de Matemática do Ensino Médio no IMPA
Promovido pela FAPERJ – SBM – IMPA
PÓS Graduando UFRJ - Ensino da Matemática
PÓS Graduando UFF - Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
professorcarlosloureiro@hotmail.com
(21) 8518-7006