A Relação de Stewart e um Exemplo de Aplicação em Problemas com Trapézios

Leonardo Santos Barbosa
leonardosantos.inf@gmail.com

4 de julho de 2014

1 Introdução

Neste texto tratamos basicamente da demonstração de uma importante relação envolvendo um triângulo qualquer e o comprimento de uma de suas cevianas. Esta relação é chamada de Relação de Stewart e facilita bastante a resolução de problemas que envolvem o cálculo do comprimento de cevianas. Para exemplificar sua utilidade, resolvemos um problema que pode ser resolvido utilizando-se do resultado aqui apresentado.

Organizamos este material da seguinte maneira: Primeiro, na seção 2, apresentamos o problema de calcular um ceviana de um triângulo; Segundo, na seção 3, resolvemos o problema apresentado, mostrando o resultado já conhecido de muitos livros bons de geometria; finalmente na seção 4, aplicamos o teorema a um problema que não necessariamente se origina em um triângulo, mas em um trapézio escaleno.

2 Problema

Dado um triângulo ABC de lados $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$, consideremos a ceviana $AP = x$ que divide o lado BC nos segmentos $BP = m$ e $CP = n$. Veja na figura 1.

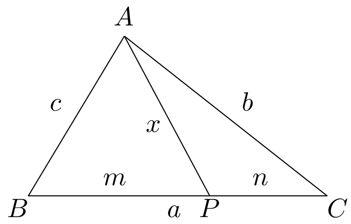

Figura 1: Um triângulo qualquer ABC com uma ceviana BP dividindo o lado BC em dois sementos de tamanho m e n.

3 Resolução

Primeiramente traçamos a altura $AH = h$ relativa ao lado BC. Seja $HP = y$. Veja na figura 2.

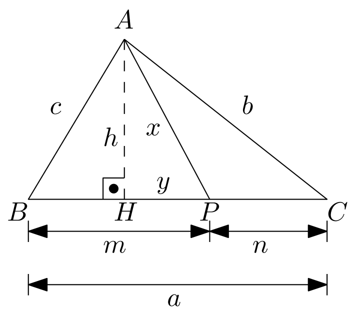

Figura 2: Traçamos AH determinando o triângulo retângulo AHP.

Como o triângulo ABH é retângulo, podemos escre-

ver:
$$c^2 = h^2 + (m-y)^2$$

O triângulo ACH também é retângulo e temos:
$$b^2 = h^2 + (n+y)^2$$

Subtraindo a primeira equação da segunda equação teremos:
$$c^2 - b^2 = h^2 - h^2 + (m-y)^2 - (n+y)^2$$

Daí:
$$c^2 - b^2 = m^2 - 2my + y^2 - (n^2 + 2ny + y^2)$$

Desenvolvendo:
$$c^2 - b^2 = m^2 - 2my + y^2 - n^2 - 2ny - y^2$$

O que nos leva a:
$$c^2 - b^2 = m^2 - 2my - n^2 - 2ny$$

Isolando y:
$$(2m+2n)y = m^2 - n^2 - c^2 + b^2$$
$$y = \frac{m^2 - n^2 - c^2 + b^2}{2m+2n}$$

Voltando ao triângulo vemos que AHP também é retângulo, logo:
$$x^2 = h^2 + y^2$$

Do teorema de Pitágoras no triângulo ABP temos:
$$c^2 - (m-y)^2 = h^2$$

Então:
$$x^2 = c^2 - (m-y)^2 + y^2$$

Logo:
$$x^2 = c^2 - m^2 + 2my - y^2 + y^2$$

E, portanto:
$$y = \frac{x^2 - c^2 + m^2}{2m}$$

Comparando os resultados achados para y:
$$\frac{x^2 - c^2 + m^2}{2m} = \frac{m^2 - n^2 - c^2 + b^2}{2m+2n}$$

Desenvolvendo:
$$x^2 - c^2 + m^2 = \frac{2m^3 - 2mn^2 - 2mc^2 + 2mb^2}{2m+2n}$$

Assim:
$$x^2 = \frac{2nc^2 - 2m^2n - 2mn^2 + 2mb^2}{2m+2n}$$

Podemos reescrever esta expressão como:
$$x^2 = \frac{nc^2 + mb^2}{m+n} - \frac{m^2n + mn^2}{m+n}$$

E:
$$x^2 = \frac{nc^2 + mb^2}{m+n} - \frac{mn(m+n)}{m+n}$$

Como $m + n = a$:
$$x^2 = \frac{nc^2 + mb^2}{a} - mn$$

Assim, já temos uma expressão que calcula o tamanho da ceviana dados os demais segmentos do triângulo. Mas, para que a expressão fique semelhante à apresentada nos livros didáticos, vamos dividi-la por mn:
$$\frac{x^2}{mn} = \frac{nc^2 + mb^2}{amn} - \frac{mn}{mn}$$

Simplificando:
$$\frac{x^2}{mn} = \frac{c^2}{am} + \frac{b^2}{an} - 1$$

E, finalmente:
$$\frac{c^2}{am} + \frac{b^2}{an} - \frac{x^2}{mn} = 1$$

4 Aplicação

A ideia desta seção 4 é mostrar um exemplo de aplicação, uma vez que dá um certo trabalho chegar até a relação de Stewart toda vez que a mesma precise ser usada. Considere um trapézio escaleno de bases 4 e 14 e lados oblíquos 6 e 8. Nosso trabalho é encontrar o tamanho do segmento que une os pontos médios das bases. Veja o trapézio da figura 3.

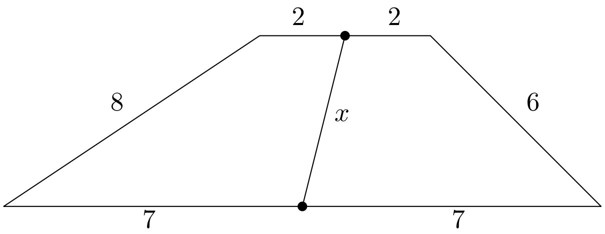

Figura 3: Dado o trapézio acima, queremos encontrar o tamanho do segmento que une os pontos médios das bases.

Para transformar este problema em outro em que apareça a relação de Stewart tracemos paralelas aos lados oblíquos partindo do ponto médio da base menor. Veja a figura 4.

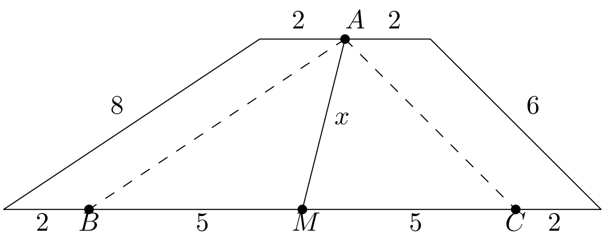

Figura 4: Traçando paralelas aos lados a partir de A, encontramos um triângulo e o problema passa a ser encontrar o tamanho da mediana do triângulo ABC.

Veja que ABC é um triângulo retângulo e, portanto, $AM = x$, que é mediana da hipotenusa, vale 5. Este exemplo foi escolhido de propósito, justamente pela facilidade de conferir que o resultado será o mesmo obtido pela relação de Stewart:

$$\frac{8^2}{10 \cdot 5} + \frac{6^2}{10 \cdot 5} - \frac{x^2}{5 \cdot 5} = 1$$

Logo:

$$\frac{64 + 36}{10 \cdot 5} - \frac{x^2}{25} = 1$$

Daí:

$$\frac{50 - x^2}{25} = 1 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$$

Exatamente o que esperávamos encontrar.

5 Conclusão

Os resultados apresentados aqui são de grande utilidade para o cálculo de cevianas de um triângulo. Mais importante que o resultado final, é perceber que o processo utilizado para encontrá-lo envolve conceitos geométricos simples, isto é, quase que unicamente o teorema de Pitágoras.

Além disso, o problema apresentado envolve uma tática eficiente para resolver problemas de trapézios, pois transforma o problema de um quadrilátero para um triângulo, o que aumenta significativamente as ferramentas que podem ser utilizadas na solução.