Soluções Comentadas
Matemática
Curso Mentor
Centro Federal de Educação Tecnológica
CEFET

Barbosa, L.S.
leonardosantos.inf@gmail.com

27 de novembro de 2014

Sumário

I Provas **5**

1 Vestibular 2011/2012 **7**
1.1 1ª Fase 7

2 Vestibular 2013/2014 **13**
2.1 1ª Fase 13

II Soluções **17**

3 Vestibular 2011/2012 **19**
3.1 1ª Fase 19

4 Vestibular 2013/2014 **29**
4.1 1ª Fase 29

Parte I

Provas

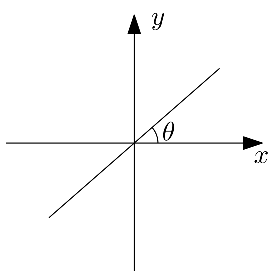
Capítulo 1

Vestibular 2011/2012

1.1 1ª Fase

Questão 11
O valor P de uma mercadoria teve dois aumentos sucessivos, um de 8% e outro de 12%, seu preço ficou em R\$ 756, 00. Se, ao invés destes dois aumentos, P tivesse um único aumento de 20%, o preço final da mercadoria seria:
(a) igual ao preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.
(b) aproximadamente R\$ 21, 53 a menos que o preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.
(c) R\$ 6, 00 a menos que o preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.
(d) R\$ 2, 00 a mais que o preço final obtido com os dois aumentos sucessivos.

Questão 12
No plano cartesiano abaixo, a reta r passa pela origem e forma um ângulo θ com o eixo x.



Escolhendo um ponto $P(a, b)$ qualquer da reta r, e considerando $\theta = 40°$, podemos afirmar que:
(a) Se P pertence ao 1º quadrante, então $a = b$.

(b) Se P pertence ao 3º quadrante, então $a < b$.
(c) $a = b$ independente de qual quadrante estiver P.
(d) Se P pertence ao 3º quadrante, então $a > b$.

Questão 13

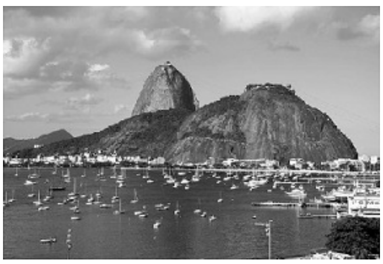
Um pai deixou de herança para seus filhos Aldo, Baldo e Caldo, mas determinou que, distribuída a herança:

- Aldo desse uma parte do que recebera a Baldo e a Caldo, de modo que os legados de Baldo e Caldo dobrassem;
- Depois disso, Baldo desse uma parte do que recebera a Aldo e a Caldo, de modo que os legados de Aldo e Caldo dobrassem;
- Finalmente, Caldo fizesse o mesmo, de modo que os legados de Aldo e Baldo dobrassem.

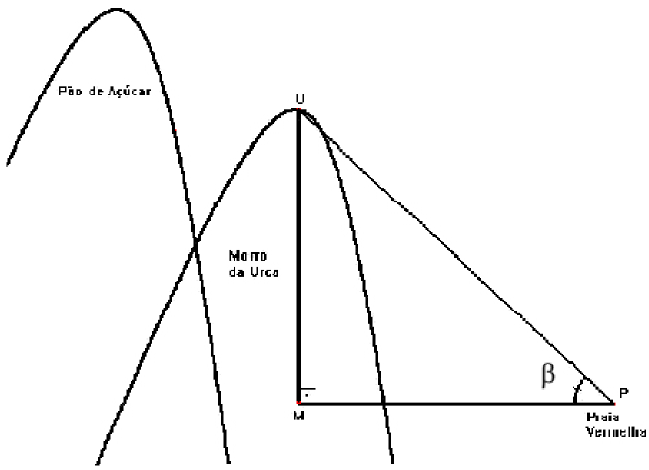
Cumpridas as determinações do pai, os filhos verificaram que cada um ficara com 160 mil reais. Qual é a soma dos algarismos do número que representa o que fora o legado original de Aldo?

(a) 5 (b) 6 (c) 7 (d) 8

Questão 14



Quem viaja no bondinho do Pão de Açúcar percorre dois trechos: o primeiro vai da Praia Vermelha até o morro da Urca (segmento PU da figura) e o segundo, parte do morro da Urca até o Pão de Açúcar.



ângulos	seno	cosseno	tangente
21°	0,358	0,934	0,384
22°	0,375	0,927	0,404
23°	0,391	0,921	0,424
24°	0,407	0,913	0,445

Sabendo que o segmento PM e a altura do morro da Urca equivalem a $\frac{4}{3}$ e a $\frac{5}{9}$ da altura do Pão de Açúcar, respectivamente, podemos afirmar que o ângulo β formado pelos segmentos PU e PM indicados na figura:
(a) está entre 21° e 22°
(b) está entre 22° e 23°
(c) está entre 23° e 24°
(d) é maior que 24°

Questão 15
Considere o seguinte procedimento: na primeira etapa, pegue uma folha de papel e corte-a ao meio, colocando os dois pedaços um sobre o outro. Em uma próxima etapa, corte novamente os papéis ao meio e coloque os pedaços um sobre o outro formando uma pilha de papéis. Continue fazendo isso em cada etapa: sempre cortando todos os pedaços de papel da etapa anterior ao meio e formando uma nova pilha com todos os pedaços. Se fosse possível realizar o que foi exposto, em quantas etapas, no mínimo, poderíamos formar uma pilha de papel com cerca de 200 m de altura? Considere que 100 folhas empilhadas têm 1 cm de altura e que podemos fazer a aproximação $2^{10} = 1024 \approx 10^3$.
(a) 21 etapas (b) 201 etapas (c) 2001 etapas (d) infinitas etapas

Questão 16 O tangram é um conhecido quebra-cabeça de sete peças que tem formas geométricas bem conhecidas, originados da decomposição de um quadrado (figura 1).

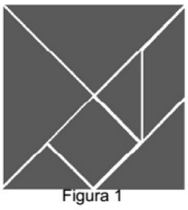


Figura 1

Hoje já se tem conhecimento do surgimento de vários tipos de quebra-cabeças geométricos planos, muitas vezes também chamados de tangram e que também tem origem em recorte de alguma figura plana.
Abaixo se encontra o tangram coração, cujas peças são obtidas recortando-se um coração plano de acordo com o esquema da figura 2, composta de: 3 setores de 90° de um círculo, 2 setores de 45° de um círculo, 1 triângulo retângulo, 1 quadrado, 1 paralelogramo e 1 trapézio retângulo. Utilizando-se todas as nove peças é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 3 e 4.

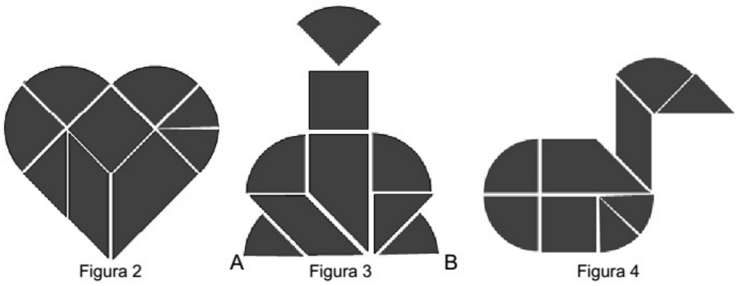
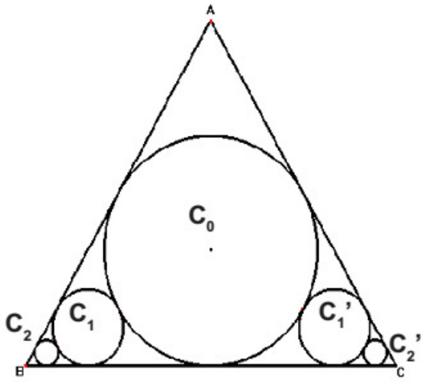


Figura 2 Figura 3 Figura 4

Se a base AB do vidro de perfume mostrado na figura 3 mede 3 cm, então a área da figura 4, que representa um "patinho" mede:
(a) $\pi + 4$ cm^2
(b) $2(\pi + 4)$ cm^2
(c) $2\pi + 4$ cm^2
(d) $2\pi + 2$ cm^2

Questão 17
Qualquer bebida extraída de uma máquina custa 1 real. Se a máquina só aceita moedas de 10, 25, 50 centavos e de 1 real, de quantas maneiras distintas pode-se pagar uma bebida nesta máquina?
(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 7

Questão 18
Seja ABC um triângulo equilátero de lado 1. Considere um círculo C_0 inscrito a ABC e, em seguida, construa um círculo C_1 tangente a C_0, AB e BC e outro círculo C_1' também tangente a C_0, BC e AC. Continue construindo infinitos círculos C_n tangentes a C_{n-1}, AB e BC. Faça o mesmo para os círculos C_n' também tangentes a C_{n-1}', BC e AC. A seguir, a figura representa um exemplo com cinco círculos.



A soma dos comprimentos de todos os infinitos círculos é:
(a) infinita (b) π (c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$

Questão 19
O "Método das Iterações" fornece um algoritmo que calcula o valor aproximado de raízes quadradas, indicado ao lado: $\sqrt{A} \approx \frac{A+B}{2\sqrt{B}}$
Onde: A é o número que desejamos obter o valor aproximado da raiz quadrada e B é o quadrado perfeito mais próximo de A.
Por exemplo, se $A = 17$, teremos $B = 16$ e daí $\sqrt{17} \approx \frac{17+16}{2\sqrt{16}} = \frac{33}{8} = 4,125$.
Aplicando o método acima, qual é o valor aproximado de $\sqrt{3}$?
(a) $5,73$ (b) $5,75$ (c) $5,77$ (d) $5,79$

Questão 20
Leia com atenção a demonstração a seguir:

Vamos provar por $a + b$ que $1 + 1 = 1$

Passo 0: Sejam a e b números reais não nulos tais que $a = b$.
Passo 1: Se $a = b$, podemos multiplicar os dois membros desta igualdade por a e obter: $a^2 = ab$
Passo 2: A seguir, subtraímos b^2 dos dois membros da igualdade: $a^2 - b^2 = ab - b^2$

Passo 3: Fatorando as expressões, temos: $(a+b)(a-b) = b(a-b)$
Passo 4: Agora dividimos ambos os membros por $(a-b)$ e obtemos: $a+b = b$
Passo 5: Como no início supomos que $a = b$, podemos substituir a por b assim: $b + b = b$
Passo 6: Colocando b em evidência, obtemos: $b(1+1) = b$
Passo 7: Por fim, dividimos a equação por b e concluímos que: $1 + 1 = 1$

É evidente que a demonstração acima está incorreta. Há uma operação errada:
(a) No passo 2.
(b) No passo 3.
(c) No passo 4.
(d) No passo 6.

Capítulo 2

Vestibular 2013/2014

2.1 1ª Fase

Questão 11
Qual o menor número positivo que devemos subtrair do número $\frac{26^2}{7}$ de modo que a diferença seja um número inteiro?
a) $\frac{1}{7}$ b) $\frac{2}{7}$ c) $\frac{3}{7}$ d) $\frac{4}{7}$

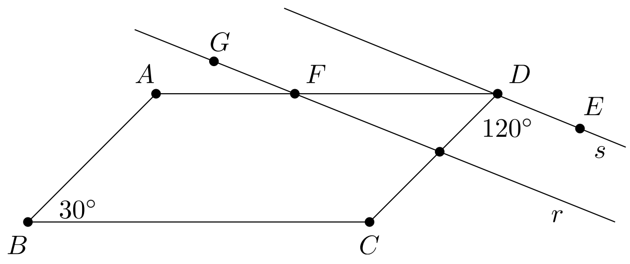
Questão 12
O valor da expressão $\frac{1}{3} + 0,333\ldots + 0,3$ é:
a) 1 b) $\frac{29}{30}$ c) $0,99$ d) $0,93$

Questão 13
Para qual valor de a a equação $(x-2)\cdot(2ax-3)+(x-2)\cdot(-ax+1)=0$ tem duas raízes reais e iguais?
a) -1 b) 0 c) 1 d) 2

Questão 14
Na Meia Maratona do Rio de Janeiro de 2013, os corredores Robson e Hudson largaram juntos com velocidades constantes. Sabendo que Robson chegou 411 m na frente de Hudson e que a velocidade de de Robson é 30% superior à velocidade de Hudson, qual a distância percorrida por Hudson até o momento em que Robson cruzou a linha de chegada?
a) 1200 m b) 1256 m c) 1300 m d) 1370 m

Questão 15
Na figura abaixo, $ABCD$ é um paralelogramo, as retas r e s são paralelas, D e E são pontos de s, F e G são pontos de r, F é um ponto de AD, $A\widehat{B}C = 30°$

e $C\widehat{D}E = 120°$. Quanto mede em graus o ângulo $D\widehat{F}G$?

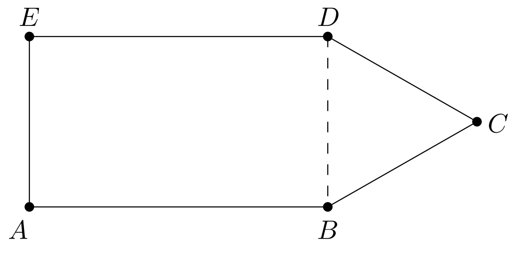


a) 120° b) 130° c) 140° d) 150°

Questão 16
Por qual número devemos multiplicar o número $0,75$ de modo que a raiz quadrada do produto obtido seja igual a 45?
a) 2700 b) 2800 c) 2900 d) 3000

Questão 17
Se eu leio 5 páginas por dia de um livro, eu termino de ler 16 dias antes do que se eu estivesse lendo 3 páginas por dia. Quantas páginas tem o livro?
a) 120 b) 125 c) 130 d) 135

Questão 18
Na figura abaixo, $ABCE$ é um retângulo e CDE é um triângulo equilátero. Sabendo que o perímetro do polígono $ABCDE$ é 456 cm e CD mede 68 cm, qual a medida do lado BC?



a) 118 cm b) 126 cm c) 130 cm d) 142 cm

Questão 19
Se ABC é um triângulo tal que $AB = 3$ cm e $BC = 4$ cm, podemos afirmar que sua área, em cm^2, é um número:
a) no máximo igual a 9
b) no máximo igual a 8
c) no máximo igual a 7

d) no máximo igual a 6

Questão 20
Seja $f(x) = 3 \cdot (x - \frac{1}{2})^2 - 4$, onde x é um número real qualquer. O menor valor que $f(x)$ pode assumir é:
a) -3 b) -4 c) -5 d) -6

Parte II

Soluções

Capítulo 3

Vestibular 2011/2012

3.1 1ª Fase

Questão 11

Solução: Um aumento de 8% sobre um valor dado é o mesmo que multiplicar por $1,08$, bem como um aumento de 12% é o mesmo que multiplicar por $1,12$. Então, estes aumentos sobre um valor x podem ser representados como se segue:

$$T = \frac{108}{100} \cdot \frac{112}{100} \cdot x$$

Onde T é o valor final, que segundo o enunciado é R$ 756,00. A partir daí:

$$T = \frac{108 \cdot 112}{10000} \cdot x \Rightarrow \frac{108 \cdot 112}{10000} \cdot x = 756$$

Fatorando e fazendo as simplificações necessárias:

$$x = \frac{108 \cdot 7 \cdot 10000}{108 \cdot 16 \cdot 7}$$

$$x = \frac{10000}{16} \Rightarrow x = 625$$

Suponhamos agora o aumento de 20%. Analogamente temos que aumentar 20% é o mesmo que multiplicar por $1,2$. Se F é a quantidade final:

$$F = \frac{12}{10} \cdot 625 \Rightarrow F = 750$$

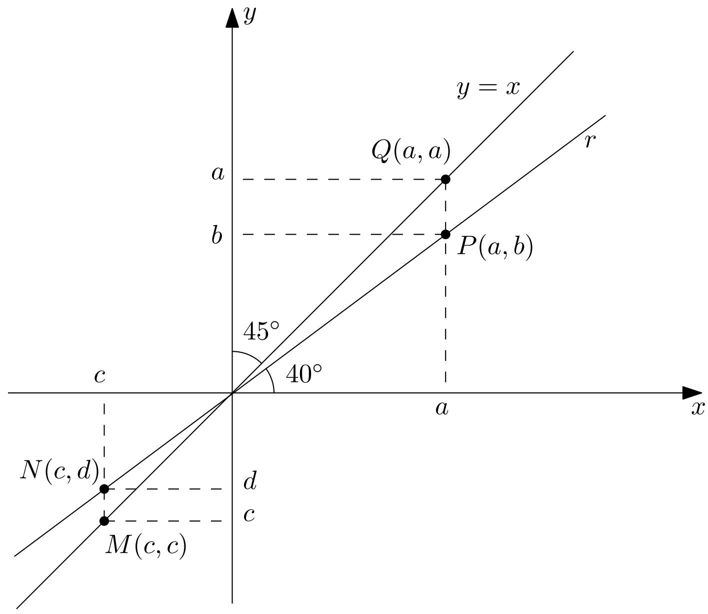
Ou seja, a diferença $T - F$ é dada por:

$$T - F = 756 - 750 \Rightarrow T - F = 6$$

Opção C

Questão 12

Solução: Se a inclinação da reta é de 40° ela é menos inclinada em relação ao eixo das abscissas do que a reta $y = x$ que contém a inclinação de 45°. Veja na figura:



Assim podemos dizer em relação a cada opção:
(a) Se P pertence ao primeiro quadrante então $a \neq b$, pois $a = b$ somente sobre a reta $y = x$.
(b) Esta é a opção correta. Veja na figura que N é um ponto de r e temos $c < d$, pois ambos são negativos. Então sabemos que $a < b$ caso P estivesse no terceiro quadrante como N.
(c) Falsa. Pelo mesmo motivo de (a).
(d) Falsa. A justificativa está na própria opção (b).
Como observação para esta solução, recomendamos que, no lugar dos valores que usamos, sejam colocados números para uma melhor visualização.

Opção B

Questão 13

Solução 1: Sejam A_0, B_0 e C_0 as quantidades iniciais que eles receberam e H a herança. Portanto:

$$A_0 + B_0 + C_0 = H \Rightarrow A_0 + B_0 + C_0 = 480000$$

Primeiro Aldo retira uma quantia x de sua parte e dá a Baldo e Caldo de modo que eles fiquem com quantias dobradas então:

$$\begin{gathered}\text{Aldo: } A_1 = A_0 - x \\ \text{Baldo: } B_1 = 2B_0 \\ \text{Caldo: } C_1 = 2C_0\end{gathered}$$

Repare que a soma não se altera, ou seja:

$$A_1 + B_1 + C_1 = 480000 \Rightarrow A_0 - x + 2B_0 + 2C_0 = 480000$$

Depois Baldo retira uma quantia y de sua parte e dá a Aldo e Caldo de modo que eles fiquem com quantias dobradas então:

$$\begin{gathered}\text{Aldo: } A_2 = 2(A_1) \Rightarrow A_2 = 2(A_0 - x) \\ \text{Baldo: } B_2 = B_1 - y \Rightarrow B_2 = 2B_0 - y \\ \text{Caldo: } C_2 = 2C_1 \Rightarrow C_2 = 4C_0\end{gathered}$$

Mais uma vez a soma não se altera:

$$A_2 + B_2 + C_2 = 480000 \Rightarrow 2A_0 - 2x + 2B_0 - y + 4C_0 = 480000$$

Por fim, Caldo retira uma quantia z de sua parte e dá a Aldo e Baldo de modo que eles fiquem com quantias dobradas então:

$$\begin{gathered}\text{Aldo: } A_3 = 2(A_2) \Rightarrow A_3 = 4(A_0 - x) \\ \text{Baldo: } B_3 = 2B_2 \Rightarrow B_3 = 4B_0 - 2y \\ \text{Caldo: } C_3 = C_2 - z \Rightarrow C_3 = 4C_0 - z\end{gathered}$$

Como cada um recebe 160000 temos:

$$4A_0 - 4x = 160000 \Rightarrow x = A_0 - 40000$$

E analogamente:

$$4B_0 - 2y = 160000 \Rightarrow y = 2B_0 - 80000$$

$$4C_0 - z = 160000 \Rightarrow z = 4C_0 - 160000$$

Vamos reescrever as equações encontradas até aqui:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 + C_0 = 480000 \\ A_0 - x + 2B_0 + 2C_0 = 480000 \\ 2A_0 - 2x + 2B_0 - y + 4C_0 = 480000 \end{cases}$$

E lembrando que:

$$\begin{cases} x = A_0 - 40000 \\ y = 2B_0 - 80000 \\ z = 4C_0 - 160000 \end{cases}$$

Substituindo o valor de x na segunda equação teremos:

$$A_0 - x + 2B_0 + 2C_0 = 480000$$

$$A_0 - (A_0 - 40000) + 2B_0 + 2C_0 = 480000 \Rightarrow B_0 + C_0 = 220000$$

Comparando com a primeira equação do sistema:

$$A_0 + B_0 + C_0 = 480000 \Rightarrow A_0 = 260000$$

Substituindo os valores de x e y na terceira equação:

$$2A_0 - 2(A_0 - 40000) + 2B_0 - (2B_0 - 80000) + 4C_0 = 480000$$

$$160000 + 4C_0 = 480000 \Rightarrow C_0 = 80000$$

Podemos calcular agora B_0:

$$A_0 + B_0 + C_0 = 480000 \Rightarrow 260000 + B_0 + 80000 = 480000$$

Daí:

$$B_0 = 140000$$

O problema já está solucionado, pois a questão só pede a soma dos algarismos de A_0 que vale 8, mas vamos calcular x, y e z:

$$x = 220000 \quad y = 200000 \quad z = 160000$$

Vamos fazer uma tabela com todos os valores das passagens do problema:

Passagem	Aldo	Baldo	Caldo
Passagem 1	260000	140000	80000
Passagem 2	40000	280000	160000
Passagem 3	80000	80000	320000
Passagem 4	160000	160000	160000

Solução 2: Podemos simplesmente fazer o problema de trás para a frente, pois sabemos que, no fim, todos os irmãos possuem 160000. Ou seja, antes disso, Aldo e Baldo possuíam 80000 e assim por diante. Basta ver na tabela anterior e isto será facilmente verificado.

Opção D

Questão 14

Solução: Seja H a altura do Pão de Açúcar e UM a altura do Morro da Urca. Do enunciado temos:

$$PM = \frac{4}{3}h \quad \text{e} \quad UM = \frac{5}{9}h$$

Calculando a tangente do ângulo β:

$$\tan\beta = \frac{UM}{PM}$$

Substituindo os valores dos segmentos:

$$\tan\beta = \frac{\frac{5}{9}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \tan\beta = \frac{5}{9}\cdot\frac{3}{4}$$

Daí:

$$\tan\beta = 0,416$$

Olhando na tabela, vemos que o ângulo está entre 22° e 23°.

Opção B

Questão 15

Solução: O que temos que ter em mente é que, no primeiro corte, teremos 2 folhas empilhadas. No segundo corte, quatro folhas empilhadas e assim por diante. Então no enésimo corte teremos 2^n folhas empilhadas.
Sabemos que 100 folhas equivalem a 1 cm de altura e 200 m equivalem a 20000 centímetros. Ou seja, se f é o número de folhas:

$$f = 20000 \times 100 \Rightarrow f = 2\cdot 10^6\,\text{folhas}$$

Este é o total de folhas para formar uma pilha de 200 m. Usando a aproximação dada:

$$2^n = 2 \cdot 10^6 \Rightarrow 2^{n-1} = 10^6 \Rightarrow 2^{n-1} = \left(10^3\right)^2$$

Então:

$$2^{n-1} \approx \left(2^{10}\right)^2 \Rightarrow 2^{n-1} \approx 2^{20}$$

Portanto:

$$n - 1 \approx 20 \Rightarrow n \approx 21$$

Opção A

Questão 16

Solução: Seja x o raio do setor circular de 90°. A partir daí, olhando a figura 2, é possível ver que o lado do quadrado, os catetos do triângulo retângulo, o menor lado e a altura do paralelogramo, a altura e a base menor do trapézio e o raio dos setores de 45° também valem x. Como $AB = 3$ cm e $AB = 3x$ teremos:

$$3x = 3 \Rightarrow x = 1\,\text{cm}$$

Agora basta calcular a área da figura 2 que é equivalente a da figura 4. Como o coração é composto de 2 setores de 90° (formando um círculo completo) e um quadrado de lado $2x$ temos:

$$S = (2x)^2 + \pi x^2 \Rightarrow S = 4x^2 + \pi x^2$$

Logo:

$$S = 4 + \pi$$

Opção A

Questão 17

Solução: Vamos fazer uma tabela com as maneiras possíveis de somar R$ 1,00:

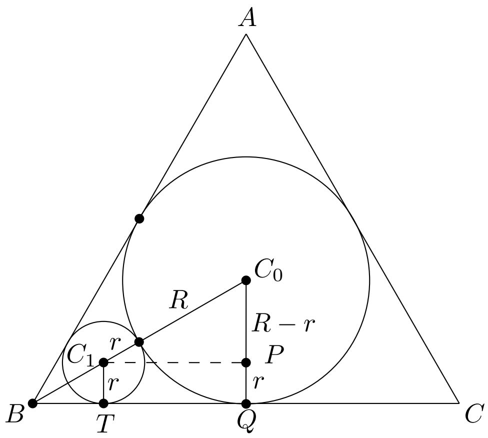
Maneira	R$ 0,10	R$ 0,25	R$ 0,50	R$ 1,00
1	0	0	0	1
2	0	0	2	0
3	0	2	1	0
4	5	0	1	0
5	0	4	0	0
6	5	2	0	0
7	10	0	0	0

São, portanto, sete maneiras.

Opção D

Questão 18

Solução: No esquema simplificado a seguir unimos os centros das circunferências de centro C_0 e C_1; T e Q são pontos de tangência e C_1P é paralelo a CB.



Daí temos que o ângulo $C_0\hat{B}C$ vale 30° e podemos calcular o seno deste ângulo no triângulo retângulo C_0C_1P:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{R-r}{R+r}$$

A altura h de um triângulo equilátero de lado 1 vale:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{AQ}{AB} \Rightarrow \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{1} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para calcular $C_0Q = R$ usamos o mesmo recurso:

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{C_0Q}{C_0B}$$

Como $C_0B = h - R$ teremos:

$$\frac{1}{2} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2} - R} \Rightarrow 2R = \frac{\sqrt{3}}{2} - R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Mas:

$$\frac{1}{2} = \frac{R-r}{R+r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} - r}{\frac{\sqrt{3}}{6} + r} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 6r}{\sqrt{3} + 6r}$$

Desenvolvendo:

$$\sqrt{3} + 6r = 2\sqrt{3} - 12r \Rightarrow 18r = \sqrt{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Todos os triângulos assim formados serão semelhantes. Assim os raios das circunferências C_0, C_1, etc. terão uma sequência numérica como segue:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{18}, \frac{\sqrt{3}}{54}, \ldots\right)$$

Os comprimentos destas circunferências serão então:

$$\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{6}, \frac{2\pi\sqrt{3}}{18}, \frac{2\pi\sqrt{3}}{54}, \ldots\right)$$

Como as circunferências C_1 e C_1', C_2 e C_2' são congruentes queremos calcular o valor da soma S:

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi\sqrt{3}}{27} + \ldots\right)$$

Ou seja:

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2\left[\frac{\pi\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots\right)\right]$$

A soma entre parenteses é a soma dos termos de uma série geométrica e vale:

$$s = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \Rightarrow s = \frac{1}{2}$$

Então:

$$S = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$$

Opção D

Questão 19

Solução: Obviamente o enunciado está incorreto, pois $\sqrt{3} \approx 1,73$ e pelo método descrito teríamos:

$$\sqrt{3} \approx \frac{3+4}{2\sqrt{4}} = \frac{7}{4} = 1,75$$

Usando $\sqrt{33}$ teríamos:

$$\sqrt{33} \approx \frac{33+36}{2\sqrt{36}} = \frac{69}{12} = 5,75$$

Opção B

Questão 20

Solução: O erro está no passo 4, pois, ao dividirmos por $a - b$, estamos dividindo por 0.

Opção C

Capítulo 4

Vestibular 2013/2014

4.1 1ª Fase

Questão 11

Solução: Sabemos que $26^2 = 676$ e que $676 = 96 \times 7 + 4$. Logo basta subtrair do numerador o menor inteiro de modo que obtenhamos um múltiplo de 7, que neste caso é o resto da divisão de 676 por 7, ou seja:

$$\frac{676}{7} - \frac{4}{7} = \frac{676-4}{7} = \frac{672}{7} = 96$$

Opção D

Questão 12

Solução: Primeiro transformamos a dízima peridica em uma fração correspondente:

$$x = 0,333\ldots \Rightarrow 10x = 3,333\ldots$$

Subtraindo uma expressão da outra obtemos:

$$10x - x = 3 \Rightarrow 9x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

Assim a expressão fica:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{10} = \frac{2}{3} + \frac{3}{10} = \frac{20+9}{30} = \frac{29}{30}$$

Opção B

Questão 13

Solução 1: Podemos reescrever a equação da seguinte maneira:

$$(x-2)\cdot(2ax-3) = -(x-2)(-ax+1)$$

Temos uma raiz que será:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

Fazendo $2ax-3=-(-ax+1)$ teremos:

$$2ax-3=ax-1 \Rightarrow ax=2$$

Como as raízes são iguais a 2 teremos $a=1$.

Solução 2: Desenvolvendo a equação termos:

$$2ax^2-3x-4ax+6+(-ax^2)+x+2ax-2=0$$

Continuando:

$$ax^2+(-2-2a)x+4=0$$

Que é uma equação quadrática literal. Para que se tenha duas raízes reais e iguais o discriminante deve ser igual a zero:

$$\Delta=(-2-2a)^2-4\cdot a\cdot 4=0$$

Desenvolvendo:

$$4+8a+4a^2-16a=0 \Rightarrow 4a^2-8a+4=0$$

Dividindo ambos os membros da equação por 4:

$$a^2-2a+1=0 \Rightarrow (a-1)^2=0 \Rightarrow a=1$$

Opção C

Questão 14

Solução: Sabemos que velocidade é a razão entre deslocamento e tempo decorrido. Chamando de v_R a velocidade de Robson e v_H a velocidade de Hudson podemos escrever:

$$v_R=\frac{d_R}{t} \quad \text{e} \quad v_H=\frac{d_H}{t}$$

Do enunciado vem que:

$$v_R = 1,3 \cdot v_H$$

E também:

$$d_H = d_R - 411$$

Logo temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 1,3 \cdot v_H = \frac{d_R}{t} \\ v_H = \frac{d_R - 411}{t} \end{cases}$$

Assim, da primeira equação encontramos:

$$v_H \cdot t = \frac{d_R}{1,3}$$

Substituindo na segunda:

$$v_H \cdot t = d_R - 411 \Rightarrow \frac{d_R}{1,3} = d_R - 411$$

Então:

$$d_R - \frac{10d_R}{13} = 411 \Rightarrow \frac{3d_R}{13} = 411 \Rightarrow d_R = 1781\,\mathrm{m}$$

Então para a distância percorrida por Hudson:

$$d_H = 1781 - 411 \Rightarrow d_H = 1370\,\mathrm{m}$$

Opção D

Questão 15

Solução: Como $ABCD$ é um paralelogramo, $C\widehat{D}F \cong C\widehat{B}A = 30°$. Seja α o ângulo entre o segmento FD e a reta s. Temos:

$$\alpha + C\widehat{D}E + F\widehat{D}C = 180° \Rightarrow \alpha + 120° + 30° = 180°$$

Logo $\alpha = 30°$. E, como $r \parallel s$, também temos $\alpha \cong A\widehat{F}G$. Como $A\widehat{F}G + D\widehat{F}G = 180°$, sabemos que $D\widehat{F}G = 150°$.

Opção D

Questão 16

Solução: Traduzindo o enunciado para uma equação temos:

$$\sqrt{x \cdot 0,75} = 45$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$0,75x = 2025 \Rightarrow x = \frac{100 \times 2025}{75} \Rightarrow x = 2700$$

Opção A

Questão 17

Solução: Seja t_3 o tempo, em dias, que leva para terminar o livro lendo 3 páginas por dia. Se n é o número de páginas devemos ter:

$$t_3 = \frac{n}{3}$$

Analogamente, se t_5 é o tempo total, em dias, para terminar o livro, lendo 5 páginas por dia, teremos:

$$t_5 = \frac{n}{5}$$

Mas, do enunciado vem que $t_5 = t_3 - 16$, então:

$$\frac{n}{5} = \frac{n}{3} - 16 \Rightarrow \frac{3n - 5n}{15} = -16 \Rightarrow -2n = -240 \Rightarrow n = 120$$

Opção A

Questão 18

Solução: Como CDE é um triângulo equilátero, temos $CD \cong DE \cong EC = 68$ cm e também $AB = 68$ cm. Fazendo $BC \cong AE = x$ e calculando o perímetro:

$$68 \cdot 3 + 2x = 456 \Rightarrow 2x = 456 - 204 \Rightarrow x = 126\,\text{cm}$$

Opção B

Questão 19

Solução: Suponhamos que o terceiro lado do triângulo seja de medida igual a x. O perímetro do triângulo será:

$$2p = 3 + 4 + x \Rightarrow 2p = 7 + x$$

O semiperímetro será $p = \frac{7+x}{2}$. Pelo radical de Heron a área do triângulo será:

$$A = \sqrt{\left(\frac{7+x}{2}\right)\left(\frac{7+x}{2} - 3\right)\left(\frac{7+x}{2} - 4\right)\left(\frac{7+x}{2} - x\right)}$$

Então:

$$A = \sqrt{\left(\frac{7+x}{2}\right)\left(\frac{7+x-6}{2}\right)\left(\frac{7+x-8}{2}\right)\left(\frac{7+x-2x}{2}\right)}$$

Desenvolvendo:

$$A = \sqrt{\left(\frac{7+x}{2}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{7-x}{2}\right)}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{49-x^2}{4}\right)\left(\frac{x^2-1}{4}\right)} \Rightarrow A = \frac{1}{4}\sqrt{-x^4+50x^2-49}$$

A expressão dentro do radical terá um máximo para x^2 igual a:

$$x_V^2 = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_V^2 = -\frac{50}{2\cdot(-1)} \Rightarrow x_V^2 = 25$$

A área máxima será, portanto:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(49-25)(25-1)} \Rightarrow A = 6$$

Opção C

Questão 20

Solução: Primeiramente, vamos desenvolver a expressão dada para f:

$$f(x) = 3\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) - 4 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 3x - \frac{13}{4}$$

Queremos o valor da ordenada do vértice, ou seja, $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$:

$$y_V = -\frac{(-3)^2 - 4\cdot 3\cdot(-\frac{13}{4})}{4\cdot 3} \Rightarrow y_V = -\frac{9+39}{12} \Rightarrow y_V = -4$$

Opção B