Soluções Comentadas
Matemática
Curso Mentor
Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx)

Barbosa, L.S.
leonardosantos.inf@gmail.com

16 de janeiro de 2014

Sumário

I Provas 5

1 Prova 2012/2013 7

2 Prova 2013/2014 15

II Soluções 21

3 Solução 2012/2013 23

4 Solução 2013/2014 37

Parte I

Provas

Capítulo 1

Prova 2012/2013

Escolha a única alternativa correta, dentre as opções apresentadas, que responde ou completa cada questão, assinalando-a, com caneta esferográfica de tinta azul ou preta, no Cartão de Respostas.

1) Considere a circunferência (λ) $x^2 + y^2 - 4x = 0$ e o ponto $P(1, \sqrt{3})$. Se a reta t é tangente a λ no ponto P, então a abscissa do ponto de intersecção de t com o eixo horizontal do sistema de coordenadas cartesianas é
[A] -2 [B] $2 + \sqrt{3}$ [C] 3 [D] $3 + \sqrt{3}$ [E] $3 + 3\sqrt{3}$

2) Um recipiente em forma de cone circular reto, com raio da base R e altura h, está completamente cheio com água e óleo.

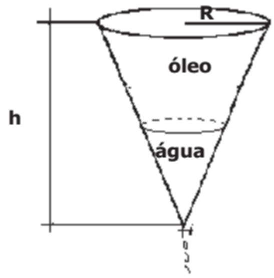


Figura fora de escala

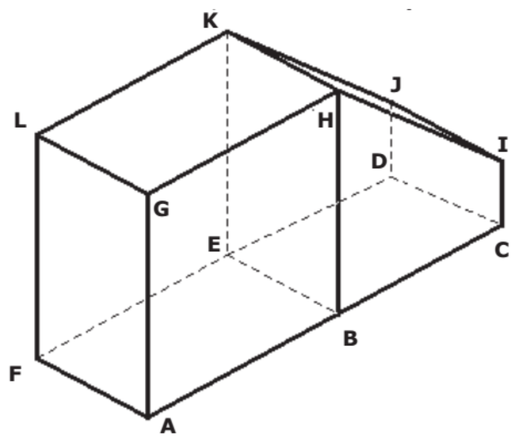
Sabe-se que a superfície de contato entre os líquidos está inicialmente na metade da altura do cone. O recipiente dispõe de uma torneira que permite escoar os líquidos de seu interior, conforme indicado na figura. Se essa torneira for aberta, exatamente até o instante em que toda água e nenhum óleo escoar, a altura do nível do óleo, medida a partir do vértice será
[A] $\frac{\sqrt[3]{7}}{2}h$ [B] $\frac{\sqrt[3]{7}}{3}h$ [C] $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}h$ [D] $\frac{\sqrt[3]{23}}{2}h$ [E] $\frac{\sqrt[3]{23}}{3}h$

3) A probabilidade de se obter um número divisível por 2 na escolha ao acaso de uma das permutações dos algarismos 1, 2, 3, 4, 5 é
[A] $\frac{1}{5}$ [B] $\frac{2}{5}$ [C] $\frac{3}{4}$ [D] $\frac{1}{4}$ [E] $\frac{1}{2}$

4) A figura geométrica formada pelos afixos das raízes complexas da equação $x^3 - 8 = 0$ tem área igual a
[A] $7\sqrt{3}$
[B] $6\sqrt{3}$
[C] $5\sqrt{3}$
[D] $4\sqrt{3}$
[E] $3\sqrt{3}$

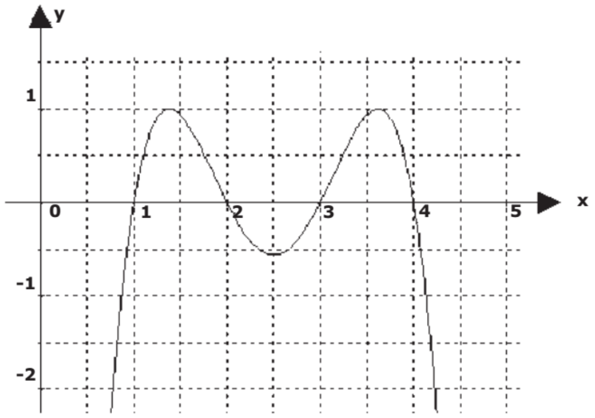
5) Se, $\frac{6-\log_a m}{1+\log_{a^2} m} = 2$ com $a > 0$, $a \neq 1$ e $m > 0$, então o valor de $\frac{\sqrt{m}}{a+\sqrt{m}}$ é
[A] 4 [B] $\frac{1}{4}$ [C] 1 [D] 2 [E] $\frac{1}{2}$

6) O sólido geométrico abaixo é formado pela justaposição de um bloco retangular e um prisma reto, com uma face em comum. Na figura estão indicados os vértices, tanto do bloco quanto do prisma.



Considere os seguintes pares de retas definidas por pontos dessa figura: as retas $\overline{LB}$ e $\overline{GE}$; as retas $\overline{AG}$ e $\overline{HI}$ e as retas $\overline{AD}$ e $\overline{GK}$. As posições relativas desses pares de retas são, respectivamente,
[A] concorrentes; reversas; reversas.
[B] reversas; reversas; paralelas.
[C] concorrentes, reversas; paralelas.
[D] reversas; concorrentes; reversas.
[E] concorrentes; concorrentes; reversas.

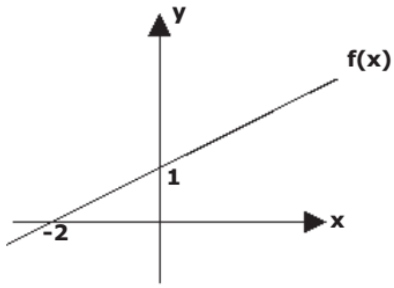
7) A figura a seguir apresenta o gráfico de um polinômio $P(x)$ do 4º grau no intervalo $]0, 5[$



O número de raízes reais da equação $P(x) + 1 = 0$ no intervalo $]0, 5[$ é
[A] 0 [B] 1 [C] 2 [D] 3 [E] 4

8) Em uma progressão aritmética, a soma S_n de seus n primeiros termos é dada pela expressão $S_n = 5n^2 - 12n$, com $n \in \mathbb{N}^*$. A razão dessa progressão é
[A] -2 [B] 4 [C] 8 [D] 10 [E] 12

9) Na figura abaixo está representado o gráfico de uma função real do 1º grau $f(x)$.



A expressão algébrica que define a função inversa de $f(x)$ é
[A] $y = \frac{x}{2} + 1$
[B] $y = x + \frac{1}{2}$
[C] $y = 2x - 2$
[D] $y = -2x + 2$
[E] $y = 2x + 2$

10) Sendo $\overline{Z}$ o conjugado do número complexo Z e i a unidade imaginária, o número complexo Z que satisfaz à condição $Z + 2\overline{Z} = 2 - Zi$ é
[A] $z = 0 + 1i$
[B] $z = 0 + 0i$
[C] $z = 1 + 0i$
[D] $z = 1 + i$
[E] $z = 1i$

11) Um polinômio $q(x)$, do 2º grau, é definido por $q(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c reais, $a \neq 0$. Dentre os polinômios a seguir, aquele que verifica a igualdade $q(x) = q(1 - x)$, para todo x real, é
[A] $q(x) = a(x^2 + x) + c$
[B] $q(x) = a(x^2 x) + c$
[C] $q(x) = a^2(x^2 x) + c$
[D] $q(x) = a^2(x^2 + x) + c$
[E] $q(x) = a^2 x + c$

12) Considere as seguintes afirmações:

I – Se uma reta r é perpendicular a um plano α, então todas as retas de α são perpendiculares ou ortogonais a r;

II – Se a medida da projeção ortogonal de um segmento AB sobre um plano αé a metade da medida do segmento AB, então a reta AB faz com α um ângulo de 60°;

III – Dados dois planos paralelos α e β, se um terceiro plano γ intercepta α e β, as interseções entre esses planos serão retas reversas;

IV – Se α e βsão dois planos secantes, todas as retas de α também interceptam β.

Estão corretas as afirmações
[A] apenas I e II
[B] apenas II e III
[C] I, II e III
[D] I, II e IV
[E] II, III e IV

13) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$

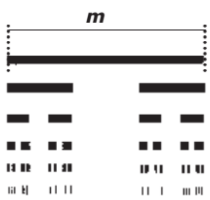
Se x e y são valores para os quais B é a transposta da Inversa da matriz A, então o valor de $x + y$ é
[A] -1 [B] -2 [C] -3 [D] -4 [E] -5

14) Seja a função $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{, se } x \text{ for racional} \\ 2x^4 & \text{, se } x \text{ for irracional} \\ x^2+8 & \text{, se } x \text{ for não real} \end{cases}$

Assim, o valor de $f(\frac{1}{2}) + f(i^{64} + 5i^{110}) + f(f(\sqrt{-2}))$, em que $i^2 = -1$ é

[A] 0 [B] 1 [C] 2 [D] 3 [E] 4

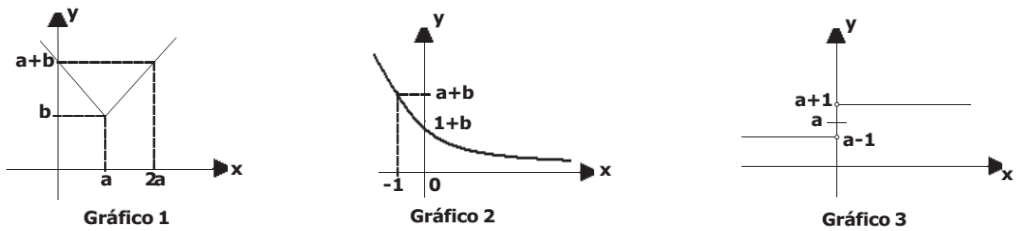
15) Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhantes ao objeto original. Em muitos casos, um fractal é gerado pela repetição indefinida de um padrão. A figura abaixo segue esse princípio. Para construí-la, inicia-se com uma faixa de comprimento m na primeira linha. Para obter a segunda linha, uma faixa de comprimento m é dividida em três partes congruentes, suprimindo-se a parte do meio. Procede-se de maneira análoga para a obtenção das demais linhas, conforme indicado na figura.



Se, partindo de uma faixa de comprimento m, esse procedimento for efetuado infinitas vezes, a soma das medidas dos comprimentos de todas as faixas é

[A] $3m$ [B] $4m$ [C] $5m$ [D] $6m$ [E] $7m$

16) Na figura abaixo estão representados os gráficos de três funções reais, sendo $a > 1$ e $b > 0$.



As expressões algébricas que podem representar cada uma dessas funções são, respectivamente,

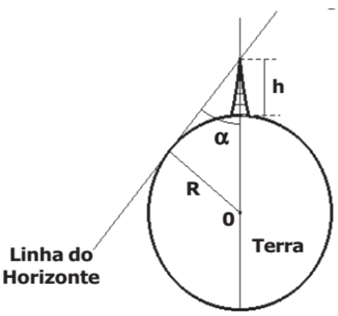
[A] $y = |x-a| - b$; $y = (\frac{1}{1+b})^x + a$ e $y = \frac{|x+a|}{x-a}$

[B] $y = |x-a| + b$; $y = (1+a)^x + b$ e $y = \frac{|x|}{x} + a$

[C] $y = |x+a| - b$; $y = (\frac{1}{a})^x + b$ e $y = \frac{|x+a|}{x+a}$
[D] $y = |x-a| + b$; $y = (\frac{1}{a})^x + b$ e $y = \frac{|x|}{x} + a$
[E] $y = |x+a| + b$; $y = (\frac{1}{1+b})^x + a$ e $y = \frac{|x+a|}{x-a}$

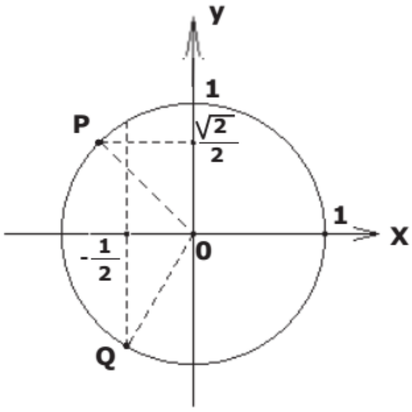
17) Um jogo pedagógico foi desenvolvido com as seguintes regras:
– Os alunos iniciam a primeira rodada com 256 pontos;
– Faz-se uma pergunta a um aluno. Se acertar, ele ganha a metade dos pontos que tem. Se errar, perde metade dos pontos que tem;
– Ao final de 8 rodadas, cada aluno subtrai dos pontos que tem os 256 iniciais, para ver se "lucrou" ou "ficou devendo".
O desempenho de um aluno que, ao final dessas oito rodadas, ficou devendo 13 pontos foi de
[A] 6 acertos e 2 erros.
[B] 5 acertos e 3 erros.
[C] 4 acertos e 4 erros.
[D] 3 acertos e 5 erros.
[E] 2 acertos e 6 erros.

18) Em uma das primeiras tentativas de determinar a medida do raio da Terra, os matemáticos da antiguidade observavam, do alto de uma torre ou montanha de altura conhecida, o ângulo sob o qual se avistava o horizonte, tangente à Terra, considerada esférica, conforme mostra a figura.



Segundo esse raciocínio, o raio terrestre em função do ângulo α é dado por:
[A] $R = \frac{\operatorname{sen}(\alpha h)}{1 - \operatorname{sen}\alpha}$
[B] $R = \frac{h \operatorname{sen}\alpha}{1 - \operatorname{sen}\alpha}$
[C] $R = \frac{h \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - 1}$
[D] $R = \frac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{h \operatorname{sen}\alpha}$
[E] $R = \frac{1 + \operatorname{sen}\alpha}{h \operatorname{sen}\alpha}$

19) Os pontos P e Q representados no círculo trigonométrico abaixo correspondem às extremidades de dois arcos, ambos com origem em $(1, 0)$, denominados respectivamente α e β, medidos no sentido positivo.



O valor de $\tan(\alpha + \beta)$ é
[A] $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$
[B] $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$
[C] $2 + \sqrt{3}$
[D] $2 - \sqrt{3}$
[E] $-1 + \sqrt{3}$

20) Sejam as funções reais $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$ e $g(x) = x - 1$. O domínio da função $f(g(x))$ é
[A] $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3 \text{ ou } x \geq 1\}$
[B] $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$
[C] $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1\}$
[D] $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$
[E] $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$

Capítulo 2

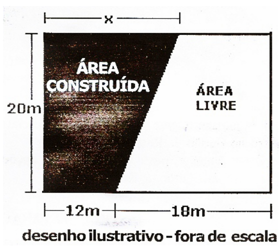
Prova 2013/2014

Escolha a única alternativa correta, dentre as opções apresentadas, que responde ou completa cada questão, assinalando-a, com caneta esferográfica de tinta azul ou preta, no Cartão de Respostas.

1) Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.
[A] Seu centro é $(-2, 1)$.
[B] A medida do seu eixo maior é 25.
[C] A medida do seu eixo menor é 9.
[D] A distância focal é 4.
[E] Sua excentricidade é $0,8$.

2) Se $Y = \{y \in \mathbb{R} \text{ tal que } |6y - 1| \geq 5y - 10\}$, então:
[A] $Y =]-\infty, \frac{1}{6}]$ [B] $Y = \{-1\}$ [C] $Y = \mathbb{R}$ [D] $Y = \emptyset$ [E] $Y = [\frac{1}{6}, +\infty]$

3) As regras que normatizam as construções em um condomínio definem que a área construída não deve ser inferior a 40% da área do lote e nem superior a 60% desta. O proprietário de um lote retangular pretende construir um imóvel de formato trapezoidal, conforme indicado na figura.



Para respeitar as normas acima definidas, assinale o intervalo que contém

todos os possíveis valores de x.
[A] $[6, 10]$ [B] $[8, 14]$ [C] $[10, 18]$ [D] $[16, 24]$ [E] $[12, 24]$

4) O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz **inversa** da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:
[A] $\frac{2}{3}$ [B] $\frac{3}{2}$ [C] 0 [D] -2 [E] $-\frac{1}{3}$

5) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos *cream cracker*, *wafer* e recheados. Os resultados indicaram que:

- 65 pessoas compram *cream crackers*.
- 85 pessoas compram *wafers*.
- 170 compram biscoitos recheados.
- 20 pessoas compram *wafers*, *cream crackers* e recheados.
- 50 pessoas compram *cream crackers* e recheados.
- 30 pessoas compram *cream crackers* e *wafers*.
- 60 pessoas compram *wafers* e recheados
- 50 pessoas não compram biscoitos dessa empresa.

Determine quantas pessoas responderam essa pesquisa.
[A] 200 [B] 250 [C] 320 [D] 370 [E] 530

6) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 4x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a
[A] 4 lotes. [B] 5 lotes. [C] 6 lotes. [D] 7 lotes. [E] 8 lotes.

7) Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

[A] $\frac{4^3\pi}{3}$ cm^2 [B] $\frac{4^3\pi}{9}$ cm^2 [C] $\frac{4^2\pi}{3}$ cm^2 [D] $\frac{4^2\pi}{9}$ cm^2 [E] $4^3\pi$ cm^2

8) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha:	1					
2ª linha:	3	5				
3ª linha:	7	9	11			
4ª linha:	13	15	17	19		
5ª linha:	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:
[A] 807 [B] 1007 [C] 1307 [D] 1507 [E] 1807

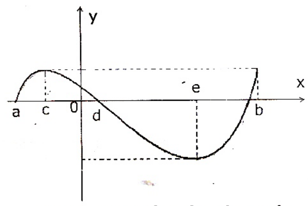
9) Um tenente do Exército está fazendo um levantamento topográfico da região onde será realizado um exercício de campo. Ele quer determinar a largura do rio que corta a região e por isso adotou os seguintes procedimentos: marcou dois pontos, A (uma árvore que ele observou na outra margem) e B (uma estaca que ele fincou no chão na margem onde ele se encontra); marcou um ponto C distante 9 metros de B, fixou um aparelho de medir ângulo (teodolito) de tal modo que o ângulo no ponto B seja reto e obteve uma medida de $\frac{\pi}{3}$ rad para o ângulo $A\hat{C}B$. Qual foi a largura do rio que ele encontrou?
[A] $9\sqrt{3}$ metros
[B] $3\sqrt{3}$ metros
[C] $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros
[D] $\sqrt{3}$ metros
[E] $4,5$ metros

10) De todos os números complexos z que satisfazem a condição $|z-(2-2i)| = 1$, existe um número complexo z_1 que fica mais próximo da origem. A parte real desse número complexo z_1 é igual a:
[A] $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$ [B] $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ [C] $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$ [D] $\frac{4+\sqrt{2}}{4}$ [E] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11) Uma epidemia ocorre, quando uma doença se desenvolve num local, de forma rápida, fazendo várias vítimas, num curto intervalo de tempo. Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $N(t) = \frac{20000}{2+15\cdot 4^{-2t}}$. Considerando que o mês tenha 30 dias, $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 3 \approx 0,48$, 2000 pessoas serão atingidas por essa epidemia, aproximadamente, em
[A] 7 dias.
[B] 19 dias.

[C] 3 meses
[D] 7 meses
[E] 1 ano

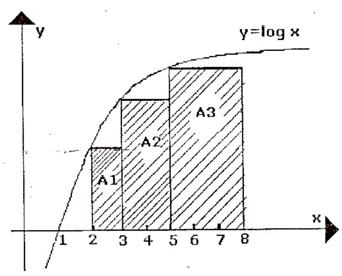
12) Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real $[a, b]$.



desenho ilustrativo - fora de escala

Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:
[A] f é crescente no intervalo $[a, 0]$.
[B] $f(x) \leq f(e)$ para todo x no intervalo $[d, b]$.
[C] $f(x) \leq 0$ para todo x no intervalo $[c, 0]$.
[D] a função f é decrescente no intervalo $[c, e]$.
[E] se $x_1 \in [a, c]$ e $x_2 \in [d, e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

13) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função $y = \log x$. Nesta representação estão destacados três retângulos cuja soma das áreas é igual a:



desenho ilustrativo - fora de escala

[A] $\log 2 + \log 3 + \log 5$
[B] $\log 30$
[C] $1 + \log 30$
[D] $1 + 2 \log 15$
[E] $1 + 2 \log 30$

14) Sejam dados a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a

equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.
[A] $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$
[B] $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$
[C] $\lambda : x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$
[D] $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$
[E] $\lambda : x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

15) Dado o polinômio $q(x)$ que satisfaz a equação $x^3+ax^2-x+b = (x-1)\cdot q(x)$ e sabendo que 1 e 2 são raízes da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, determine o intervalo no qual $q(x) \leq 0$:
[A] $[-5, -4]$ [B] $[-3, -2]$ [C] $[-1, 2]$ [D] $[3, 5]$ [E] $[6, 7]$

16) Sendo z o número complexo obtido na rotação de $90°$, em relação à origem, do número complexo $1 + i$, determine z^3:
[A] $1 - i$ [B) $-1 + i$ [C] $-2i$ [D] $-1 - 2i$ [E] $2 + 2i$

17) Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse elemento ser um número múltiplo de 12 é:
[A] $\frac{1}{2}$ [B] $\frac{3}{5}$ [C] $\frac{1}{3}$ [D] $\frac{2}{3}$ [E] $\frac{3}{8}$

18) Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida é:
[A] $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
[B] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2}\}$
[C] $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
[D] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
[E] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq 1\}$

19) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é
[A] 18 cm^3. [B] 36 cm^3. [C] $18\sqrt{3}$ cm^3. [D] $36\sqrt{3}$ cm^3. [E] 40 cm^3.

20) Em um treinamento da arma de Artilharia, existem 3 canhões A, B e C. Cada canhão, de acordo com o seu modelo, tem um raio de alcance diferente e os três têm capacidade de giro horizontal de $360°$. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 91 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C

é de 6 km, determine, em km^2, a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.

[A] $\frac{23}{2}\pi$ [B] $\frac{23}{4}\pi$ [C] $\frac{385}{8}\pi$ [D] $\frac{195}{4}\pi$ [E] $\frac{529}{4}\pi$

Parte II

Soluções

Capítulo 3

Solução 2012/2013

Questão 1

Solução 1: Primeiro precisamos encontrar o centro da circunferência reescrevendo a equação dada[1]:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 4$$

O centro da circunferência é $C(2,0)$ e o raio é $R = 2$. Feito isso precisamos encontrar o coeficiente angular da equação da reta s que passa pelo centro de λ e pelo ponto P:

$$m_s = \frac{y_C - y_P}{x_C - x_P} \Rightarrow m_s = \frac{0 - \sqrt{3}}{2 - 1} \Rightarrow m_s = -\sqrt{3}$$

As retas t e s são perpendiculares, logo $m_s \cdot m_t = -1$, daí:

$$m_t = \frac{-1}{-\sqrt{3}} \Rightarrow m_t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

A equação da tangente t será portanto:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + n$$

Como ela passa pelo ponto $P(1, \sqrt{3})$:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 1 + n \Rightarrow n = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow n = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow n = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

[1]Lembre-se que a equação da circunferência de centro $C(x_0, y_0)$ e raio R pode ser escrita como $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

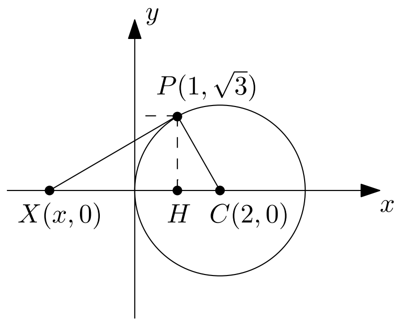
Então temos para a reta t:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Mas queremos saber a raiz, logo:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = -2$$

Solução 2: Depois de encontrar a equação da circunferência, veja na figura que o triângulo CPX é retângulo em P e sabemos que $CP = 2$ (raio da circunferência).



Como $CP \perp PX$, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo CPX:

$$CX^2 = PX^2 + CP^2 \Rightarrow (2 - x)^2 = PX^2 + 2^2$$

Daí:

$$4 - 4x + x^2 = PX^2 + 4 \Rightarrow -4x + x^2 = PX^2$$

Para achar PX usamos o teorema de Pitágoras no triângulo PHX:

$$PX^2 = PH^2 + HX^2 \Rightarrow PX^2 = (\sqrt{3})^2 + (1 - x)^2$$

Então:

$$PX^2 = 3 + 1 - 2x + x^2 \Rightarrow PX^2 = 4 - 2x + x^2$$

Voltando:

$$-4x + x^2 = 4 - 2x + x^2 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

Opção A

Questão 2

Solução: Primeiro vamos calcular o volume de água na parte inferior do cone. Chamemos de $h_a = \frac{h}{2}$ a altura do cone de água e $R_a = \frac{R}{2}$ o raio do cone de água. Seu volume V_a será:

$$V_a = \frac{1}{3}\pi R_a^2 h_a \Rightarrow V_a = \frac{1}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{h}{2} \Rightarrow V_a = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Mas sabemos que o volume do cone todo é $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, ou seja, o volume de óleo V_o é:

$$V_o = \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Quando toda a água escoar, este volume V_o formará um novo cone de mesmo volume, porém de raio r e altura h'. Então:

$$V_o = \frac{1}{3}\pi r^2 h' \Rightarrow \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 h'$$

Fazendo as devidas simplificações e, isolando h':

$$\frac{7}{8} \cdot R^2 h = r^2 h' \Rightarrow \frac{R^2}{r^2} = \frac{8h'}{7h}$$

Mas a seção tranversal deste novo cone forma dois triângulos semelhantes e podemos escrever:

$$\frac{R}{r} = \frac{h}{h'}$$

Comparando as duas últimas equações:

$$\left(\frac{h}{h'}\right)^2 = \frac{8h'}{7h} \Rightarrow (h')^3 = \frac{7h^3}{8} \Rightarrow h' = \frac{h\sqrt[3]{7}}{2}$$

Opção A

Questão 3

Solução: Para que o número seja divisível por 2 ele deve terminar por 2 ou 4. Então pelo princípio multiplicativo temos um total T de números pares igual a:

$$T = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow T = 48$$

O total geral de números é $N = 5! = 120$. Daí a probabilidade p de um dos números escolhidos ser par vale:

$$p = \frac{48}{120} \Rightarrow p = \frac{2}{5}$$

Opção B

Questão 4

Solução: A equação $x^3 - 8 = 0$ possuí três raízes e todas possuem o mesmo múdulo, pois são números complexos que têm seus afixos sobre uma mesma circunferência. Como uma das raízes é 2, sabemos que todas têm módulo igual a 2. E o que queremos é a area de um triângulo equilátero que tem:

$$\frac{2}{3}h = 2 \Rightarrow h = 3$$

Mas em um triângulo equilátero temos:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

A área S portanto será:

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{(\frac{6}{\sqrt{3}})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = 3\sqrt{3}$$

Apesar de não ser necessário, vamos agora encontrar as três raízes da equação. Temos:

$$z^3 - z_0 = 0 \Rightarrow z^3 = z_0 \Rightarrow z = \sqrt[3]{z_0}$$

Usando a fórmula de Moivre encontramos as soluções que são da forma:

$$z = \rho^{\frac{1}{3}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\right], k \in \mathbb{Z}$$

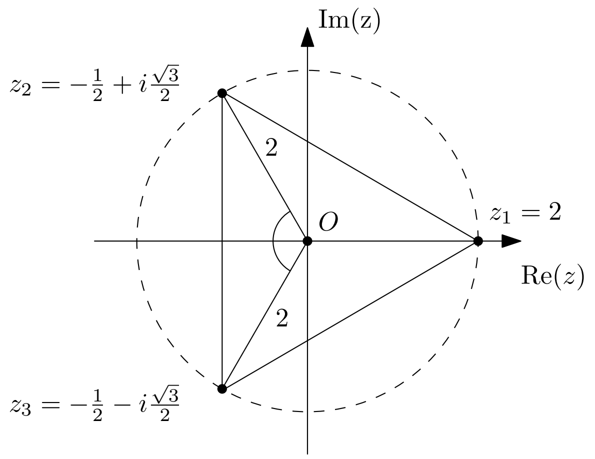
Como uma das soluções é $z_1 = 2$, temos, para esta solução, $\theta = 0$ e podemos encontrar as demais:

$$z = \sqrt[3]{8} \cdot \left[\cos\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{0 + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

Veja que, para $k = 0$, teremos $z_1 = 2$. Variando k:

- $k = 1 \Rightarrow z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$
- $k = 2 \Rightarrow z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]$

Para os demais valores de k, as raízes vão recair sobre as já encontradas. Veja na figura que os afixos formam um triângulo equilátero. Além disso, $Oz_1 \cong Oz_2 \cong Oz_3 = 2$ e $z_1\widehat{O}z_2 \cong z_2\widehat{O}z_3 \cong z_3\widehat{O}z_1 = 120°$. Assim, o lado do triângulo poderia também ser calculado usando-se a lei dos cossenos.



Opção E

Questão 5

Solução: Desenvolvendo a expressão dada:

$$\frac{6 - \log_a m}{1 + \log_{a^2} m} = 2 \Rightarrow \frac{6 - \log_a m}{1 + \frac{1}{2}\log_a m} = 2$$

Daí:

$$6 - \log_a m = 2 + \log_a m \Rightarrow 2\log_a m = 4 \Rightarrow \log_a m = 2 \Rightarrow m = a^2$$

Simplificando a expressão do enunciado:

$$\frac{\sqrt{m}}{a + \sqrt{m}} = \frac{\sqrt{a^2}}{a + \sqrt{a^2}} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

Opção E

Questão 6

Solução: Vamos analisar cada caso separadamente:

- LB e GE: As arestas LG e EB são paralelas, logo têm retas suporte que são paralelas e, portanto, determinam um único plano α que as contêm. Como $L \in \alpha$ e $B \in \alpha$ temos $LB \in \alpha$. Analogamente, $E \in \alpha$ e $G \in \alpha$ temos $GE \in \alpha$, então LB e GE são concorrentes;
- AG e HI: Os pontos A, G, H e I pertencem ao mesmo plano β. Como as retas suporte das arestas AG e HI não são paralelas nem congruentes, são concorrentes;

- AD e GK: Os pontos A e D estão em um plano π e os pontos G e K estão em um plano θ de modo que $\pi \parallel \theta$. Como as retas suportes de GK e de AE são paralelas, pois estão em faces paralelas do prisma $ABEFHKLG$, a reta suporte de GK não é paralela a reta suporte de AD, pois AE e AD têm A comum. Logo AD e GK são reversas.

Opção E

Questão 7

Solução: O ponto de mínimo local no intervalo $(2, 3)$, de acordo com a figura, parece ser $M(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2})$. Se somamos uma unidade ao polinômio, somente "elevamos" em uma unidade todas as ordenadas de todos os pontos. Logo o novo mínimo local será $M'(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$. Portanto o polinômio possuirá, agora, apenas duas raízes no intervalo $(0, 5)$.

Opção C

Questão 8

Solução: Primeiro calculamos S_1 a partir da expressão dada:

$$S_1 = 5 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 \Rightarrow S_1 = -7$$

Este é o próprio primeiro elemento, ou seja, $a_1 = 1$. Agora calculamos S_2 usando a expressão dada e o resultado anterior:

$$S_2 = a_2 + a_1 \Rightarrow 5 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 = a_2 + (-7)$$

Então:

$$a_2 = -4 + 7 \Rightarrow a_2 = 3$$

A razão é, portanto:

$$r = a_2 - a_1 \Rightarrow r = 3 - (-7) \Rightarrow r = 10$$

Opção D

Questão 9

Solução 1: Vamos encontrar a equação da função dada. Usando a equação segmentária da reta:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

Em que p e q são os valores da abcissa e da ordenada em que o gráfico intercepta os eixos coordenados respectivamente, ou seja, $p = -2$ e $q = 1$. Então:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$$

Agora, para achar a inversa, basta trocar x por y e isolar y:

$$\frac{y}{-2} + \frac{x}{1} = 1 \Rightarrow -\frac{y}{2} = -x + 1$$

Portanto:

$$y = 2x - 2$$

Solução 2: Os pontos dados são $(0, 1)$ e $(-2, 0)$. Podemos, para achar a inversa, trocar x por y em cada ponto, ou seja, os novos pontos serão $(1, 0)$ e $(0, -2)$. Repare que já conhecemos o termo independente da função usando o segundo ponto:

$$y = mx - 2$$

Como $(1, 0)$ é a raiz desta função:

$$0 = 1 \cdot m - 2 \Rightarrow m = 2$$

Daí:

$$y = 2x - 2$$

Opção C

Questão 10

Solução: Da expressão dada temos:

$$Z + 2\overline{Z} = 2 - Zi \Rightarrow 2\overline{Z} = 2 - Z(i + 1)$$

Fazendo $Z = a + bi$ teremos $\overline{Z} = a - bi$ e:

$$2(a - bi) = 2 - (a + bi)(i + 1)$$

Desenvolvendo:

$$2a - 2bi = 2 - (ai + a + bi^2 + bi)$$

Simplificando e agrupando os termos semelhantes:

$$2a - 2bi = 2 - a + b - (a + b)i$$

Igualando as partes real e imaginária correspondentes teremos o sistema:

$$\begin{cases} 2a = 2 - a + b \\ 2b = a + b \end{cases}$$

Da segunda equação temos $a = b$. Substituindo na primeira equação:

$$3a = 2 + a \Rightarrow a = 1$$

Então $b = 1$ e:

$$Z = 1 + i$$

Opção D

Questão 11

Solução: De acordo com o enunciado:

$$q(x) = q(1-x) \Rightarrow ax^2 + bx + c = a(1-x)^2 + b(1-x) + c$$

Então:

$$ax^2 + bx = a(1 - 2x + x^2) + b - bx$$

Daí:

$$ax^2 + bx = ax^2 - (2a + b)x + a + b$$

Como dois polinômios só são idênticos se seus coeficientes são idênticos, teremos:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -2a - b = b \end{cases}$$

As duas equações são idênticas e temos $a = b$. Logo:

$$q(x) = ax^2 + ax + c \Rightarrow q(x) = a(x^2 + x) + c$$

Opção A

Questão 12

Solução: Vamos analisar cada alternativa.
I – Verdadeira. Se r é perpendicular a α, é perpendicular a todas as retas de α que passam pelo ponto P da interseção de r com α. Daí seja uma reta t de α que não passe por P. Pegamos uma reta $s \parallel t$ que passe por P e teremos $s \perp r$, então t e r são ortogonais;
II – Verdadeira. Suponha que a projeção ortogonal $CD = \frac{AB}{2}$ esteja em um plano α que não forma 60° com a reta AB. Mas existe um plano β que faz

$60°$ com AB e, cuja projeção ortogonal $MN = \frac{AB}{2}$. Daí $MN \cong CD$ e, por isso, $\alpha \parallel \beta$, contrariando a hipótese.
III – Falsa. Seja $\alpha \cap \gamma = r$ e $\beta \cap \gamma = s$. Temos que $r \in \gamma$ e $s \in \gamma$, portanto, r e s são paralelas – que é o caso –, congruentes ou concorrentes. Mas nunca reversas, pois teriam que estar em planos distintos;
IV – Falsa. Basta ver que se temos $\alpha \cap \beta = r$ e tomarmos uma reta $s \in \alpha$ e $t \in \beta$ de modo que $s \parallel r$ e $t \parallel r$, então $s \parallel t$.

Opção A

Questão 13

Solução: Em primeiro lugar vamos encontrar a inversa de A. Para matrizes A de segunda ordem a inversa A^{-1} tem o seguinte formato:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Em que $\det A$ é o determinante da matriz original. Então:

$$A^{-1} = \frac{1}{3x-5} \cdot \begin{bmatrix} x & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Agora precisamos da transposta de A^{-1}, daí:

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{x}{3x-5} & \frac{-1}{3x-5} \\ \frac{-5}{3x-5} & \frac{3}{3x-5} \end{bmatrix}$$

Igualando esta matriz à matriz B teremos:

$$\begin{bmatrix} \frac{x}{3x-5} & \frac{-1}{3x-5} \\ \frac{-5}{3x-5} & \frac{3}{3x-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y+4 \\ y & 3 \end{bmatrix}$$

Então:

$$\frac{3}{3x-5} = 3 \Rightarrow 3x-5 = 1 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$$

E

$$\frac{-5}{3 \cdot 2 - 5} = y \Rightarrow y = -5$$

Portanto $x + y = -3$.

Opção C

Questão 14

Solução: Vamos ver o que ocorre para cada parcela da expressão pedida. Primeiro, vemos que $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, então:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Sabemos, também, que:

$$i^{64} = i^{4 \cdot 16 + 0} = \left(i^4\right)^{16} \cdot i^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

E que:

$$i^{110} = i^{4 \cdot 27 + 2} = \left(i^4\right)^{27} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$$

Então:

$$f(i^{64} + 5i^{110}) = f(1 + 5 \cdot (-1)) = f(-4)$$

Como $-4 \in \mathbb{Q}$:

$$f(-4) = 2 \cdot (-4) - 1 \Rightarrow f(-4) = -9$$

Como $\sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$ teremos:

$$f(\sqrt{-2}) = f(\sqrt{2 \cdot (-1)}) = f(\sqrt{2}i)$$

Logo:

$$f(\sqrt{2}i) = x^2 + 8 \Rightarrow f(\sqrt{2}i) = (\sqrt{2}i)^2 + 8 \Rightarrow f(\sqrt{2}i) = 2 \cdot (-1) + 8 = 6$$

Então:

$$f(f(\sqrt{-2})) = f(6) = 2 \cdot 6 - 1 = 11$$

Portanto, e finalmente:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f(i^{64} + 5i^{110}) + f(f(\sqrt{-2})) = 0 + (-9) + 11 = 2$$

Opção C

Questão 15

Solução: Primeiro precisamos perceber que há um padrão. Façamos então uma tabela com L linhas e coloquemos ao final de cada linha o tamanho total da faixa restante m_L correspondente, ou seja, após a retirada do pedaço respectivo:

Linha 1: $m_1 = m$
Linha 2: $m_2 = m_1 - \frac{m}{3} = m - \frac{m}{3} = \frac{2}{3}m$
Linha 3: $m_3 = m_2 - 2 \cdot \frac{m}{9} = \frac{2}{3}m - \frac{2}{9}m = \frac{4}{9}m$
Linha 4: $m_4 = m_3 - 4 \cdot \frac{m}{27} = \frac{4}{9}m - \frac{4}{27}m = \frac{8}{27}m$
Linha 5: $m_5 = m_4 - 8 \cdot \frac{m}{81} = \frac{8}{27}m - \frac{8}{81}m = \frac{16}{81}m$
$\vdots$ $\vdots$
Linha L: $m_L = m_{L-1} - 2^{L-2} \cdot \frac{m}{3^{L-1}} = \frac{2^{L-2}m}{3^{L-2}} - \frac{2^{L-2}m}{3^{L-1}} = (\frac{2}{3})^{L-1}m$
$\vdots$ $\vdots$

Veja que, a exceção da primeira linha, em que não há "retirada", as demais obedecem à expressão da linha L. Mas queremos o total M:

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_L + \ldots$$

Então, repare que a soma é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$:

$$M = m + \frac{2}{3}m + \frac{4}{9}m + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^L m + \ldots$$

Ou seja:

$$M = m\left[1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{2}{3}\right)^L + \ldots\right]$$

Finalmente:

$$M = m \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}}\right) \Rightarrow M = 3m$$

Opção A

Questão 16

Solução: Em geral, para problemas em que temos o gráfico e queremos encontrar a expressão algébrica que define a função, precisamos saber a princípio qual é o tipo de função com o qual estamos lidando. Mas aqui, quem dá esta informação são as opções. Para o gráfico 1, por exemplo, só podemos afirmar que a função envolve módulo porque todas as opções são deste formato. Aí basta analisar os pontos dados para cada gráfico e verificar em qual das opções há uma expressão que corresponde àqueles pontos. Então:

- O gráfico 1 mostra uma função que passa pelos pontos (a, b), $(2a, a+b)$ e $(0, a+b)$. A função que satisfaz estes pontos é $y = |x - a| + b$. Uma alternativa a esta solução, que pode parecer um pouco "um chute", mas de fato não é (dada a forma como a questão foi colocada), é verificar que a função do gráfico 1 é a função $f(x) = |x|$ deslocada a unidades para a direita e b unidades para cima;

- O gráfico 2 possui uma curva que se parece que com o gráfico de uma função exponencial e cuja expressão deve obedecer aos pontos $(0, 1+b)$ e $(-1, a+b)$. A expressão é $y = (\frac{1}{a})^x + b$. Mais uma vez, podemos verificar que a exponencial é decrescente e, portanto, a base m deve ser tal que $0 < m < 1$. Além disso, ela está deslocada b unidades para cima;

- O gráfico 3, supostamente, mostra duas funções constantes para intervalos disjuntos de x e o ponto $(0, a)$. Do gráfico, vemos que para $x > 0$ temos $y = a+1$ e para $x < 0$ temos $y = a-1$. A expressão que obedece a isto é $y = \frac{|x|}{x} + a$, claro, definindo que, para $x = 0$, temos $y = a$. Como observação, o enunciado (e o gráfico) não deixa claro se o ponto $(0, a)$ pertence realmente ao gráfico.

Opção D

Questão 17

Solução: A ideia do cálculo da pontução final do aluno é a ideia de aumentos e descontos sucessivos de uma quantia inicial. Veja que calculamos a pontuação da rodada e, depois, multiplicamos pelo fator seguinte para calcular a pontuação seguinte. Os fatores são: se ele acerta, recebe metade do valor x_0 que tem, logo:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}x_0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}x_0$$

Ou seja, um aumento de 50% de sua pontuação atual. Já se ele erra, perde metade de sua pontuação atual, ou seja:

$$x = x_0 - \frac{1}{2}x_0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}x_0$$

Portanto um desconto de 50%. Assim sua pontuação final P sempre será dada por:

$$P = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot x_0$$

Em que x_0 é a pontução inicial, n é o número de acertos e m é o número de erros. E ainda: $m + n = 8$ (no nosso caso) que é o número de rodadas. Daí se ele teve que ficar devendo 13 pontos, ao final da última rodada ele tinha $256 - 13 = 243$ pontos. Resumindo: é como se ele investisse 256 pontos e a cada período (neste caso rodadas) ou seus pontos "rendem" 50%, caso ele acerte; ou seus pontos "desvalorizam" 50%, no caso de ele errar. Então:

$$243 = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^m \cdot 256$$

Desenvolvendo:

$$3^5 = \frac{3^n}{2^{n+m}} \cdot 2^8$$

Mas $n + m = 8$, logo:

$$3^5 = 3^n \Rightarrow n = 5$$

Consequentemente $m = 3$. Ou seja, 5 acertos e 3 erros.

Opção B

Questão 18

Solução: No triângulo dado, formado pela tangente, pelo raio R e pelo segmento que une o topo da torre ao centro da Terra teremos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{R}{R + h}$$

Então:

$$(R + h) \operatorname{sen} \alpha = R \Rightarrow R \operatorname{sen} \alpha - R = -h \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow R = \frac{h \operatorname{sen} \alpha}{1 - \operatorname{sen} \alpha}$$

Opção B

Questão 19

Solução: Vamos por partes. Primeiro vamos calcular $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$, lembrando que o raio do círculo vale 1, que P está no segundo quadrante e Q está no terceiro quadrante:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

E, portanto, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. E também $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = -1$. Analogamente para $\operatorname{sen} \beta$ e $\cos \beta$:

$$\cos \beta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 240^\circ$$

Daí teremos $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e, logo, $\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \sqrt{3}$. A partir daí:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Logo:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{-1+\sqrt{3}}{1-(-1)\cdot(\sqrt{3})} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{-1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = \frac{-1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-3}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-3}$$

E por fim:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{-4+2\sqrt{3}}{-2} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 2-\sqrt{3}$$

Opção D

Questão 20

Solução: Vamos encontrar a expressão algébrica da função composta $f(g(x))$:

$$f(g(x)) = \sqrt{(x-1)^2+4(x-1)} \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{x^2-2x+1+4x-4}$$

Portanto:

$$f(g(x)) = \sqrt{x^2+2x-3}$$

Devemos ter $x^2+2x-3 \geq 0$. Como as raízes são -3 e 1, teremos[2]:

$$D = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$$

Opção A

[2]Aqui, por economia de escrita, passamos direto pela resolução da equação do segundo grau. Caso queira, você pode verificar que a equação $x^2+2x-3=0$ equivale a escrever $(x+3)(x-1)=0$.

Capítulo 4

Solução 2013/2014

Questão 1

Solução: Dada a equação do enunciado só precisamos organizar os termos, para poder competra os quadrados:

$$9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y - 164 = 0$$

Podemos então escrever:

$$(3x - 6)^2 - 36 + (5y + 5)^2 - 25 - 164 = 0$$

Então:

$$[3(x - 2)]^2 + [5(y + 1)]^2 = 36 + 25 + 164$$

Portanto:

$$9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{225}{9}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{225}{25}} = 1$$

E finalmente:

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

Sabemos que a equação da elipse de centro (x_0, y_0) tem o formato:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Assim, esta equação representa uma elipse de centro $(2, -1)$, com eixo maior $2a = 10$ e eixo menor $2b = 6$. Desta forma, $a = 5$, $b = 3$ e podemos calcular a distância focal $f = 2c$ por meio de c e da relação entre os eixos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4$$

Como a distância focal vale $2c$ temos $f = 8$. A excentricidade vale $e = \frac{c}{a}$, então:

$$e = \frac{4}{5} \Rightarrow e = 0,8$$

Opção E

Questão 2

Solução: Temos que resolver a seguinte inequação modular:

$$|6y - 1| \geq 5y - 10$$

Para que o módulo de um número real x seja maior que um valor real positivo a ele deve ser maior do que esse número ou menor do que o simétrico deste número:

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$

Assim temos dois casos:

$$6y - 1 \geq 5y - 10 \Rightarrow y \geq -9$$

Ou:

$$6y - 1 \leq -5y + 10 \Rightarrow y \leq 1$$

Assim temos a união de dois intervalos:

$$[-9, +\infty] \cup [-\infty, -1] = \mathbb{R}$$

Opção C

Questão 3

Solução: A área S do trapézio deve estar no intervalo:

$$\frac{40}{100}R \leq S \leq \frac{60}{100}R$$

Em que R representa a área do retângulo. Como $R = 20 \times 30 = 600$ m^2:

$$\frac{40}{100} \cdot 600 \leq S \leq \frac{60}{100} \cdot 600$$

Usando a expressão que calcula a área do trapézio:

$$240 \leq \frac{(12 + x) \cdot 20}{2} \leq 360$$

Portanto:

$$24 \leq 12 + x \leq 36 \Rightarrow 12 \leq x \leq 24$$

Opção E

Questão 4

Solução: Pela propriedade da inversa M^{-1} de uma matriz M de ordem n temos:

$$M \cdot M^{-1} = I_n$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes teremos:

$$\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pegando a terceira coluna da matriz resultante do produto teremos um sistema com três equações:

$$\begin{cases} c+i=0 \\ 2c+f=0 \\ f+i=1 \end{cases}$$

Da primera equação temos $c = -i$. Substituindo na terceira:

$$f + (-c) = 1 \Rightarrow f = c + 1$$

Na segunda equação teremos:

$$2c + c + 1 = 0 \Rightarrow 3c = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

Daí podemos calcular f, que é o elemento procurado:

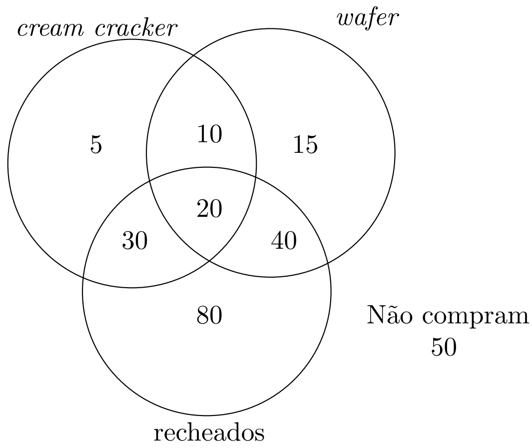
$$f = -\frac{1}{3} + 1 \Rightarrow f = \frac{2}{3}$$

Opção A

Questão 5

Solução: Utilizando um diagrama de Venn podemos colocar os valores fornecidos pelo problema:
O número n de pessoas que que respondeu a pesquisa corresponde ao somatório de todos os valores no diagrama:

$$n = 20 + 10 + 30 + 40 + 5 + 15 + 80 + 50 \Rightarrow n = 250$$



Opção B

Questão 6

Solução: Do enunciado temos a informação de que o lucro $L(x)$ vale:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$

Daí:

$$L(x) = 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40) \Rightarrow L(x) = -2x^2 + 28x + 40$$

O número de lotes que a empresa deve vender para obter lucro máximo corresponde à abscissa do vértice:

$$x = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x = 7$$

Opção D

Questão 7

Solução: A superfície total S de uma esfera de raio R é dada por:

$$S = 4\pi R^2$$

Como são 12 gomos iguais teremos:

$$S_g = \frac{4\pi R^2}{12} + \pi R^2 \Rightarrow S_g = \frac{4\pi \cdot 16}{12} + \pi \cdot 16$$

A parcela somada é a "área lateral" do gomo, portanto:

$$S_g = \frac{16\pi}{3} + 16\pi \Rightarrow S_g = \frac{64\pi}{3}$$

Lembrando que $64 = 4^3$ encontramos a opção correta.

Opção A

Questão 8

Solução: Reparemos que, quando a linha é de ordem ímpar, o termo central é o quadrado do valor da linha. Assim, na 43ª linha temos o termo central valendo $43^2 = 1849$. Vejamos ainda que o número de termos de cada linha corresponde à ordem da linha. Serão, então, 43 termos na 43ª linha e será, portanto, o termo central o 22º termo. Mas como todos os termos são ímpares, podemos imaginar uma progressão aritmética cujo 22º termo vale 1849 e da qual queremos descobrir o primeiro termo. Como a razão é 2 podemos escrever:

$$a_{22} = a_1 + 21 \cdot r \Rightarrow 1849 = a_1 + 21 \cdot 2 \Rightarrow a_1 = 1807$$

Opção E

Questão 9

Solução: O que o tenente fez foi desenhar um triângulo ABC retângulo em B, com cateto $BC = 9$ m e ângulo $A\widehat{C}B = \frac{\pi}{3}$. Como queremos calcular o lado AB, basta usar a tangente:

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{9} \Rightarrow AB = 9\sqrt{3}\,\text{m}$$

Opção A

Questão 10

Solução: Façamos $z = a + bi$, teremos:

$$|a + bi - (2 - 2i)| = 1 \Rightarrow |a - 2 + (b + 2)i| = 1$$

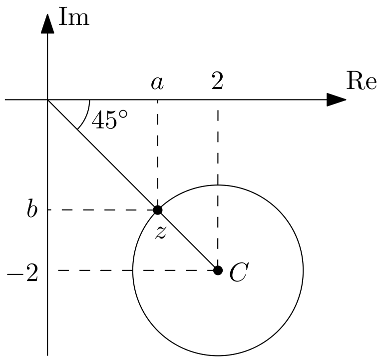
Calculando o módulo temos:

$$\sqrt{(a-2)^2 + (b+2)^2} = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 = 1$$

Esta equação corresponde a um círculo de raio 1 com centro $C(2, -2)$.
Veja que a inclinação da reta que passa pelo centro do círculo é de $45°$.
Através das relações de seno e cosseno podemos calcular a e b:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{2 - |b|}{1} \Rightarrow |b| = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |b| = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$$

Como $\operatorname{sen} 45° = \cos 45°$ temos que $a = |b|$.



Opção A

Questão 11

Solução: Substituindo o valor de 2000 pessoas na equação da epidemia temos:

$$2000 = \frac{20000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow 1 = \frac{10}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow 2 + 15 \cdot 4^{-2t} = 10$$

A partir daí:

$$15 \cdot 4^{-2t} = 8$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte maneira:

$$15 \cdot (2^2)^{-2t} = 2^3 \Rightarrow 15 = \frac{2^3}{2^{-4t}}$$

Fatorando 15 e aplicando as propriedades das potências temos:

$$3 \cdot 5 = 2^{3+4t}$$

Podemos então escrever:

$$\log(3 \cdot 5) = \log(2^{3+4t}) \Rightarrow \log 3 + \log 5 = (3 + 4t) \log 2$$

Como $5 = \frac{10}{2}$ teremos:

$$\log 3 + \log \frac{10}{2} = (3 + 4t) \log 2 \Rightarrow 0,48 + 1 - 0,30 = (3 + 4t) \cdot 0,30$$

$$\frac{118}{30} = 3 + 4t \Rightarrow \frac{14}{15} = 4t \Rightarrow t = \frac{7}{30} \text{ meses}$$

Para encontrar o tempo em dias basta multiplicar por 30 e obteremos 7 dias.

Opção A

Questão 12

Solução: Vamos analisar cada opção:
[A] FALSA. f só é crescente no intervalo $[a, c]$. No intervalo $[c, e]$ ela é decrescente.
[B] FALSA. $f(e)$ é o valor mínimo da função f.
[C] FALSA. $f > 0$ para todo $x \in [c, d)$.
[D] VERDADEIRA.
[E] FALSA. Temos $f(x_1) \geq 0$ para $x_1 \in [a, c]$, enquanto $f(x_2) \leq 0$ para $x_2 \in [d, e]$.

Opção D

Questão 13

Solução: Seja S a soma das áreas, logo:

$$S = A_1 + A_2 + A_3$$

D acordo com o gráfico podemos calcular cada área:

$$S = 1 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 5$$

Podemos reescrever esta expressão da seguinte maneira:

$$S = 1 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 2 \cdot \log 5 + \log 5$$

Aplicando as propriedades de logaritmos:

$$S = \log(2 \cdot 5) + 2(\log 3 + \log 5) \Rightarrow S = \log 10 + 2\log(3 \cdot 5)$$

Então:

$$S = 1 + 2\log 15$$

Opção D

Questão 14

Solução: Primeiro vamos achar o centro da circunferência dada:

$$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$$

Completando os quadrados:

$$x^2 + 4x + y^2 + 10y + 25 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 + 25 = 0$$

Daí:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$$

O centro é portanto $(-2, -5)$. Como a circunferência passa pelo ponto P, simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo x, a distância entre os pontos corresponde ao raio. O ponto P é $(-1, -1)$ a distância PC será:

$$R = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-5-(-1))^2} \Rightarrow R = \sqrt{1+16} \Rightarrow R = \sqrt{17}$$

Escrevendo a equação da circunferência:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 17$$

Calculando as potências:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 17$$

A equação então será:

$$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$$

Opção B

Questão 15

Solução: Se 1 é raiz da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, então podemos escrever:

$$1^3 + a \cdot 1^2 - 1 + b = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

E, também, se 2 é raiz da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, então podemos escrever:

$$2^3 + a \cdot 2^2 - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -6$$

Substituindo a primeira na segunda equação:

$$4a + (-a) = -6 \Rightarrow a = -2$$

Portanto, $b = 2$, e a equação pode ser reescrita:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Fatorando esta equação em termos de suas raízes:

$$(x - x_1)(x - 1)(x - 2) = 0$$

Em que x_1 é a terceira raiz. Assim teremos:

$$(x - x_1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - x_1x^2 + 3xx_1 - 2x_1 = 0$$

Portanto:

$$x^3 - (3 + x_1)x^2 + (3x_1 + 2)x - 2x_1 = 0$$

Como as duas equações representam o mesmo polinômio teremos:

$$-2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -1$$

Podemos agora escrever $q(x)$:

$$q(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{x-1} \Rightarrow q(x) = (x+1)(x-2)$$

A expressão tem duas raízes reais e é negativa ou nula entre estas raízes, ou seja, para $-1 \leq x \leq 2$.

Opção C

Questão 16

Solução: Para efetuar uma rotação de 90° em um número complexo devemos multiplicá-lo por i, logo:

$$z = (1 + i)i \Rightarrow z = -1 + i$$

Calculando z^2:

$$z^2 = (-1 + i)^2 \Rightarrow z^2 = 1 - 2i - 1 \Rightarrow z^2 = -2i$$

Calculando z^3:

$$z^3 = z^2 \cdot z \Rightarrow (-2i) \cdot (-1 + i) \Rightarrow z^3 = 2 + 2i$$

Opção E

Questão 17

Solução: Fatorando 360 encontramos:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

O conjunto $D(360)$ de divisores de 360 tem, portanto:

$$D(360) = (3+1)(2+1)(1+1) \Rightarrow D(360) = 24\,\text{divisores}$$

Como $12 = 2^2 \cdot 3$ podemos escrever 360 como sendo:

$$360 = (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)$$

O número m de múltiplos de 12 que são divisores de 360 será portanto:

$$m = (1+1)(1+1)(1+1) \Rightarrow m = 8$$

A probabilidade fica então:

$$P = \frac{8}{24} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

Opção C

Questão 18

Solução: Se 2 é raiz do polinômio podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para reescrevê-lo como um produto de dois polinômios:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & -5 & 1 & 2 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Então:

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x-2)(2x^2 - x - 1)$$

As raízes de $2x^2 - x - 1 = 0$ são 1 e $-\frac{1}{2}$. Logo esta expressão é negativa para o intervalo $(-\frac{1}{2}, 1)$. Queremos $P(x) \geq 0$. Isto ocorre em dois casos:

- Caso 1: $x - 2 \geq 0$ e $2x^2 - x - 1 \geq 0$.
  Neste caso, temos como interseção que $x \geq 2$.

- Caso 2: $x - 2 \leq 0$ e $2x^2 - x - 1 \leq 0$.
  Neste caso, temos como interseção que $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

A união dos intervalos é, portanto, $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

Opção C

Questão 19

Solução: Seja ℓ a aresta da base e h a aresta lateral. Sabemos do enunciado que $\frac{\ell}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Considerando S_B a área da base, o volume é:

$$V = S_B h \Rightarrow V = 6\ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} h$$

Mas $\ell = h\frac{\sqrt{3}}{3}$, daí:

$$V = 3\left(h\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h \Rightarrow V = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja V' o volume quando aumentamos a aresta da base em 2 cm. Ou seja:

$$V' = 3(\ell + 2)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} h$$

Como $V' = V + 108$ teremos:

$$3(\ell + 2)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 108$$

Lembrando que $\ell = h\frac{\sqrt{3}}{3}$ temos:

$$3\left(h\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 108$$

Desenvolvendo:

$$3\left(\frac{h^2}{3} + 4h\frac{\sqrt{3}}{3} + 4\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 108$$

Multiplicando toda a equação por 2 e aplicando a propriedade distributiva:

$$\left(h^2 + 4h\sqrt{3} + 12\right) \cdot \sqrt{3} h = h^3\sqrt{3} + 216$$

Aplicando mais uma vez a propriedade distributiva:

$$\sqrt{3}h^3 + 12h^2 + 12\sqrt{3}h = h^3\sqrt{3} + 216$$

Finalmente:

$$12h^2 + 12\sqrt{3}h - 216 = 0 \Rightarrow h^2 + \sqrt{3}h - 18 = 0$$

Calculando h:

$$h_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

Então:

$$h_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{2}$$

Temos:

$$h_1 = 2\sqrt{3} \quad \text{e} \quad h_2 = -3\sqrt{3}$$

Mas $h > 0$, logo h_1 é que vale. Calculando ℓ:

$$\ell = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ell = 2\,\text{cm}$$

Por fim, voltando ao volume original:

$$V = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = 36\,\text{cm}^3$$

Opção B

Questão 20

Solução: Como os círculos são tangentes entre si, a área total protegida S é a soma das áreas de cada círculo de raios r_A, r_B e r_C das áreas protegidas por A, B e C respectivamente:

$$S = \pi r_A^2 + \pi r_B^2 + \pi r_C^2$$

Falta calcular os raios. Façamos:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 9 \\ r_A + r_C = 6 \\ r_B + r_C = 8 \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever:

$$r_B = 9 - r_A$$

Então:

$$\begin{cases} r_A + r_C = 6 \\ 9 - r_A + r_C = 8 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$9 + 2r_C = 14 \Rightarrow r_C = \frac{5}{2}\,\text{km}$$

Ou seja, $r_A = \frac{7}{2}$ km e $r_B = \frac{11}{2}$ km. Daí:

$$S = \pi \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Teremos:

$$S = \frac{\pi}{4} (49 + 121 + 25) \Rightarrow S = \frac{195\pi}{4}$$

Opção D