Soluções Comentadas
Matemática
Curso Mentor
Provas de Matemática do Concurso de
Admissão à Escola Preparatória de Cadetes do
Exército
EsPCEx

Barbosa, L.S.
leonardosantos.inf@gmail.com

23 de setembro de 2013

Sumário

Parte I

Provas

Capítulo 1

Prova 2013/2014 — Modelo F

Escolha a única alternativa correta, dentre as opções apresentadas, que responde ou completa cada questão, assinalando-a, com caneta esferográfica de tinta azul ou preta, no Cartão de Respostas.

1) Sobre a curva $9x^2 + 25y^2 - 36x + 50y - 164 = 0$, assinale a alternativa correta.
[A] Seu centro é $(-2, 1)$.
[B] A medida do seu eixo maior é 25.
[C] A medida do seu eixo menor é 9.
[D] A distância focal é 4.
[E] Sua excentricidade é $0,8$.

2) Se $Y = \{y \in \mathbb{R} \,\text{tal que}\, |6y - 1| \geq 5y - 10\}$, então:
[A] $Y =]-\infty, \frac{1}{6}]$
[B] $Y = \{-1\}$
[C] $Y = \mathbb{R}$
[D] $Y = \emptyset$
[E] $Y = [\frac{1}{6}, +\infty]$

3) As regras que normatizam as construções em um condomínio definem que a área construída não deve ser inferior a 40% da área do lote e nem superior a 60% desta. O proprietário de um lote retangular pretende construir um imóvel de formato trapezoidal, conforme indicado na figura. Para respeitar as normas acima definidas, assinale o intervalo que contem todos os possíveis valores de x.
[A] $[6, 10]$ [B] $[8, 14]$ [C] $[10, 18]$ [D] $[16, 24]$ [E] $[12, 24]$

4) O elemento da segunda linha e terceira coluna da matriz **inversa** da

matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ é:

[A] $\frac{2}{3}$ [B] $\frac{3}{2}$ [C] 0 [D] -2 [E] $-\frac{1}{3}$

5) Uma determinada empresa de biscoitos realizou uma pesquisa sobre a preferência de seus consumidores em relação a seus três produtos: biscoitos *cream cracker*, *wafer* e recheados. Os resultados indicaram que:

- 65 pessoas compram *cream crackers*.
- 85 pessoas compram *wafers*.
- 170 compram biscoitos recheados.
- 20 pessoas compram *wafers*, *cream crackers* e recheados.
- 50 pessoas compram *cream crackers* e recheados.
- 30 pessoas compram *cream crackers* e *wafers*.
- 60 pessoas compram *wafers* e recheados
- 50 pessoas não compram biscoitos dessa empresa.

Determine quantas pessoas responderam essa pesquisa.

[A] 200 [B] 250 [C] 320 [D] 370 [E] 530

6) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 4x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, então o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo é igual a

[A] 4 lotes. [B] 5 lotes. [C] 6 lotes. [D] 7 lotes. [E] 8 lotes.

7) Considere que uma laranja tem a forma de uma esfera de raio 4 cm, composta de 12 gomos exatamente iguais. A superfície total de cada gomo mede:

[A] $\frac{4^3\pi}{3}$ cm^2 [B] $\frac{4^3\pi}{9}$ cm^2 [C] $\frac{4^2\pi}{3}$ cm^2 [D] $\frac{4^2\pi}{9}$ cm^2 [E] $4^3\pi$ cm^2

8) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro

1ª linha:	1					
2ª linha:	3	5				
3ª linha:	7	9	11			
4ª linha:	13	15	17	19		
5ª linha:	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:
[A] 807 [B] 1007 [C] 1307 [D] 1507 [E] 1807

9) Um tenente do Exército está fazendo um levantamento topográfico da região onde será realizado um exercício de campo. Ele quer determinar a largura do rio que corta a região e por isso adotou os seguintes procedimentos: marcou dois pontos, A (uma árvore que ele observou na outra margem) e B (uma estaca que ele fincou no chão na margem onde ele se encontra); marcou um ponto C distante 9 metros de B, fixou um aparelho de medir ângulo (teodolito) de tal modo que o ângulo no ponto B seja reto e obteve uma medida de $\frac{\pi}{3}$ rad para o ângulo $A\hat{C}B$. Qual foi a largura do rio que ele encontrou?
[A] $9\sqrt{3}$ metros
[B] $3\sqrt{3}$ metros
[C] $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ metros
[D] $\sqrt{3}$ metros
[E] $4,5$ metros

10) De todos os números complexos z que satisfazem a condição $|z-(2-2i)| = 1$, existe um número complexo z_1 que fica mais próximo da origem. A parte real desse número complexo z_1 é igual a:
[A] $\frac{4-\sqrt{2}}{2}$ [B] $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$ [C] $\frac{4-\sqrt{2}}{4}$ [D] $\frac{4+\sqrt{2}}{4}$ [E] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

11) Uma epidemia ocorre, quando uma doença se desenvolve num local, de forma rápida, fazendo várias vítimas, num curto intervalo de tempo. Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas por ela atingida é $N(t) = \frac{20000}{2+15\cdot 4^{-2t}}$. Considerando que o mês tenha 30 dias, $\log 2 \approx 0,30$ e $\log 3 \approx 0,48$, 2000 pessoas serão atingidas por essa epidemia, aproximadamente, em
[A] 7 dias.
[B] 19 dias.
[C] 3 meses
[D] 7 meses
[E] 1 ano

12) Na figura abaixo está representado o gráfico da função polinomial f, definida no intervalo real $[a, b]$
Com base nas informações fornecidas pela figura, podemos afirmar que:
[A] f é crescente no intervalo $[a, 0]$.
[B] $f(x) \leq f(e)$ para todo x no intervalo $[d, b]$.
[C] $f(x) \leq 0$ para todo x no intervalo $[c, 0]$.
[D] a função f é decrescente no intervalo $[c, e]$.
[E] se $x_1 \in [a, c]$ e $x_2 \in [d, e]$ então $f(x_1) < f(x_2)$.

13) Na figura abaixo, está representado o gráfico da função $y = \log x$. Nesta representação estão destacados três retângulos cuja soma das áreas é igual a:
[A] $\log 2 + \log 3 + \log 5$
[B] $\log 30$
[C] $1 + \log 30$
[D] $1 + 2\log 15$
[E] $1 + 2\log 30$

14) Sejam dados a circunferência $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$ e o ponto P, que é simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo das abscissas. Determine a equação da circunferência concêntrica à λ e que passa pelo ponto P.
[A] $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 16 = 0$
[B] $\lambda : x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$
[C] $\lambda : x^2 - y^2 + 4x - 5y + 16 = 0$
[D] $\lambda : x^2 + y^2 - 4x - 5y + 12 = 0$
[E] $\lambda : x^2 - y^2 - 4x - 10y - 17 = 0$

15) Dado o polinômio $q(x)$ que satisfaz a equação $x^3+ax^2-x+b = (x-1)\cdot q(x)$ e sabendo que 1 e 2 são raízes da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, determine o intervalo no qual $q(x) \leq 0$:
[A] $[-5, -4]$ [B] $[-3, -2]$ [C] $[-1, 2]$ [D] $[3, 5]$ [E] $[6, 7]$

16) Sendo z o número complexo obtido na rotação de $90°$, em relação à origem, do número complexo $1 + i$, determine z^3:
[A] $1 - i$ [B) $-1 + i$ [C] $-2i$ [D] $-1 - 2i$ [E] $2 + 2i$

17) Se escolhermos, ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores inteiros positivos do número 360, a probabilidade de esse elemento ser um número múltiplo de 12 é:
[A] $\frac{1}{2}$ [B] $\frac{3}{5}$ [C] $\frac{1}{3}$ [D] $\frac{2}{3}$ [E] $\frac{3}{8}$

18) Sabendo que 2 é uma raiz do polinômio $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + x + 2$, então o conjunto de todos os números reais x para os quais a expressão $\sqrt{P(x)}$ está definida é:
[A] $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$
[B] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{1}{2}\}$
[C] $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$
[D] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$
[E] $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2 \text{ e } x \neq 1\}$

19) Considere um prisma regular reto de base hexagonal tal que a razão entre a aresta da base e a aresta lateral é $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Aumentando-se a aresta da base em 2 cm e mantendo-se a aresta lateral, o volume do prisma ficará aumentado de 108 cm^3. O volume do prisma original é
[A] 18 cm^3. [B] 36 cm^3. [C] $18\sqrt{3}$ cm^3. [D] $36\sqrt{3}$ cm^3. [E] 40 cm^3.

20) Em um treinamento da arma de Artilharia, existem 3 canhões A, B e C. Cada canhão, de acordo com o seu modelo, tem um raio de alcance diferente e os três têm capacidade de giro horizontal de 360°. Sabendo que as distâncias entre A e B é de 91 km, entre B e C é de 8 km e entre A e C é de 6 km, determine, em km^2, a área total que está protegida por esses 3 canhões, admitindo que os círculos são tangentes entre si.
[A] $\frac{23}{2}\pi$ [B] $\frac{23}{4}\pi$ [C] $\frac{385}{8}\pi$ [D] $\frac{195}{4}\pi$ [E] $\frac{529}{4}\pi$

Parte II

Soluções

Capítulo 2

Solução 2013/2014 — Modelo F

Questão 1

Solução: Dada a equação do enunciado só precisamos organizar os termos, para poder competra os quadrados:

$$9x^2 - 36x + 25y^2 + 50y - 164 = 0$$

Podemos então escrever:

$$(3x - 6)^2 - 36 + (5y + 5)^2 - 25 - 164 = 0$$

Então:

$$[3(x - 2)]^2 + [5(y + 1)]^2 = 36 + 25 + 164$$

Portanto:

$$9(x - 2)^2 + 25(y + 1)^2 = 225 \Rightarrow \frac{(x - 2)^2}{\frac{225}{9}} + \frac{(y + 1)^2}{\frac{225}{25}} = 1$$

E finalmente:

$$\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1$$

Sabemos que a equação da elipse de centro (x_0, y_0) tem o formato:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Assim, esta equação representa uma elipse de centro $(2, -1)$, com eixo maior $2a = 10$ e eixo menor $2b = 6$. Desta forma, $a = 5$, $b = 3$ e podemos calcular a distância focal $f = 2c$ por meio de c e da relação entre os eixos:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 25 - 9 \Rightarrow c = 4$$

Como a distância focal vale $2c$ temos $f = 8$. A excentricidade vale $e = \frac{c}{a}$, então:

$$e = \frac{4}{5} \Rightarrow e = 0,8$$

Opção E

Questão 2

Solução: Temos que resolver a seguinte inequação modular:

$$|6y - 1| \geq 5y - 10$$

Para que o módulo de um número real x seja maior que um valor real positivo a ele deve ser maior do que esse número ou menor do que o simétrico deste número:

$$|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \text{ ou } x \geq a$$

Assim temos dois casos:

$$6y - 1 \geq 5y - 10 \Rightarrow y \geq -9$$

Ou:

$$6y - 1 \leq -5y + 10 \Rightarrow y \leq 1$$

Assim temos a união de dois intervalos:

$$[-9, +\infty] \cup [-\infty, -1] = \mathbb{R}$$

Opção C

Questão 3

Solução: A área S do trapézio deve estar no intervalo:

$$\frac{40}{100}R \leq S \leq \frac{60}{100}R$$

Em que R representa a área do retângulo. Como $R = 20 \times 30 = 600 \text{ m}^2$:

$$\frac{40}{100} \cdot 600 \leq S \leq \frac{60}{100} \cdot 600$$

Usando a expressão que calcula a área do trapézio:

$$240 \leq \frac{(12 + x) \cdot 20}{2} \leq 360$$

Portanto:

$$24 \leq 12 + x \leq 36 \Rightarrow 12 \leq x \leq 24$$

Opção E

Questão 4

Solução: Pela propriedade da inversa M^{-1} de uma matriz M de ordem n temos:

$$M \cdot M^{-1} = I_n$$

Daí:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando as matrizes teremos:

$$\begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ d+g & e+h & f+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pegando a terceira coluna da matriz resultante do produto teremos um sistema com três equações:

$$\begin{cases} c+i=0 \\ 2c+f=0 \\ f+i=1 \end{cases}$$

Da primera equação temos $c = -i$. Substituindo na terceira:

$$f + (-c) = 1 \Rightarrow f = c + 1$$

Na segunda equação teremos:

$$2c + c + 1 = 0 \Rightarrow 3c = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

Daí podemos calcular f, que é o elemento procurado:

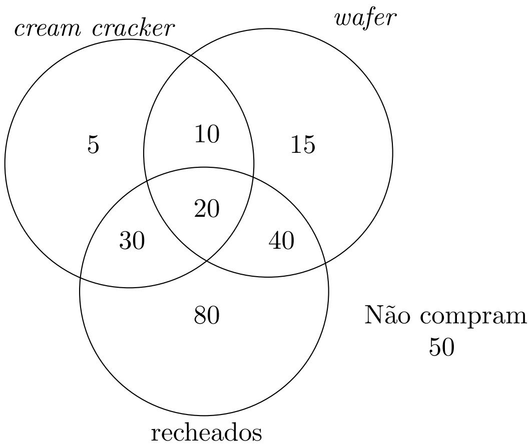
$$f = -\frac{1}{3} + 1 \Rightarrow f = \frac{2}{3}$$

Opção B

Questão 5

Solução: Utilizando um diagrama de Venn podemos colocar os valores fornecidos pelo problema:
O número n de pessoas que que respondeu a pesquisa corresponde ao somatório de todos os valores no diagrama:

$$n = 20 + 10 + 30 + 40 + 5 + 15 + 80 + 50 \Rightarrow n = 250$$



Opção B

Questão 6

Solução: Do enunciado temos a informação de que o lucro $L(x)$ vale:

$$L(x) = V(x) - C(x)$$

Daí:

$$L(x) = 3x^2 - 12x - (5x^2 - 40x - 40) \Rightarrow L(x) = -2x^2 + 28x + 40$$

O número de lotes que a empresa deve vender para obter lucro máximo corresponde à abscissa do vértice:

$$x = -\frac{28}{2 \cdot (-2)} \Rightarrow x = 7$$

Opção D

Questão 7

Solução: A superfície total S de uma esfera de raio R é dada por:

$$S = 4\pi R^2$$

Como são 12 gomos iguais teremos:

$$S_g = \frac{4\pi R^2}{12} + \pi R^2 \Rightarrow S_g = \frac{4\pi \cdot 16}{12} + \pi \cdot 16$$

A parcela somada é a "área lateral" do gomo, portanto:

$$S_g = \frac{16\pi}{3} + 16\pi \Rightarrow S_g = \frac{64\pi}{3}$$

Lembrando que $64 = 4^3$ encontramos a opção correta.

Opção A

Questão 8

Solução: Reparemos que, quando a linha é de ordem ímpar, o termo central é o quadrado do valor da linha. Assim, na 43ª linha temos o termo central valendo $43^2 = 1849$. Vejamos ainda que o número de termos de cada linha corresponde à ordem da linha. Serão, então, 43 termos na 43ª linha e será, portanto, o termo central o 22º termo. Mas como todos os termos são ímpares, podemos imaginar uma progressão aritmética cujo 22º termo vale 1849 e da qual queremos descobrir o primeiro termo. Como a razão é 2 podemos escrever:

$$a_{22} = a_1 + 21 \cdot r \Rightarrow 1849 = a_1 + 21 \cdot 2 \Rightarrow a_1 = 1807$$

Opção E

Questão 9

Solução: O que o tenente fez foi desenhar um triângulo ABC retângulo em B, com cateto $BC = 9$ m e ângulo $A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$. Como queremos calcular o lado AB, basta usar a tangente:

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{AB}{9} \Rightarrow AB = 9\sqrt{3}\,\mathrm{m}:$$

Opção A

Questão 10

Solução: Façamos $z = a + bi$, teremos:

$$|a + bi - (2 - 2i)| = 1 \Rightarrow |a - 2 + (b + 2)i| = 1$$

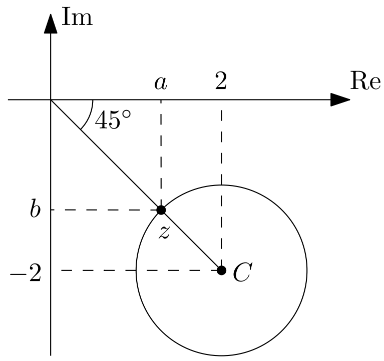
Calculando o módulo temos:

$$\sqrt{(a-2)^2 + (b+2)^2} = 1 \Rightarrow (a-2)^2 + (b+2)^2 = 1$$

Esta equação corresponde a um círculo de raio 1 com centro $C(2, -2)$.
Veja que a inclinação da reta que passa pelo centro do círculo é de 45°. Através das relações de seno e cosseno podemos calcular a e b:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{2-b}{1} \Rightarrow b = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \frac{4-\sqrt{2}}{2}$$

Como $\operatorname{sen} 45^\circ = \cos 45^\circ$ temos que $a = b$.



Opção A

Questão 11

Solução: Substituindo o valor de 2000 pessoas na equação da epidemia temos:

$$2000 = \frac{20000}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow 1 = \frac{10}{2 + 15 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow 2 + 15 \cdot 4^{-2t} = 10$$

A partir daí:

$$15 \cdot 4^{-2t} = 8$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte maneira:

$$15 \cdot (2^2)^{-2t} = 2^3 \Rightarrow 15 = \frac{2^3}{2^{-4t}}$$

Fatorando 15 e aplicando as propriedades das potências temos:

$$3 \cdot 5 = 2^{3+4t}$$

Podemos então escrever:

$$\log(3 \cdot 5) = \log(2^{3+4t}) \Rightarrow \log 3 + \log 5 = (3 + 4t)\log 2$$

Como $5 = \frac{10}{2}$ teremos:

$$\log 3 + \log \frac{10}{2} = (3 + 4t)\log 2 \Rightarrow 0,48 + 1 - 0,30 = (3 + 4t) \cdot 0,30$$

$$\frac{118}{30} = 3 + 4t \Rightarrow \frac{14}{15} = 4t \Rightarrow t = \frac{7}{30} \text{ meses}$$

Para encontrar o tempo em dias basta multiplicar por 30 e obteremos 7 dias.

Opção A

Questão 12

Solução: Vamos analisar cada opção:
[A] FALSA. f só é crescente no intervalo $[a, c]$. No intervalo $[c, e]$ ela é decrescente.
[B] FALSA. $f(e)$ é o valor mínimo da função f.
[C] FALSA. $f > 0$ para todo $x \in [c, d)$.
[D] VERDADEIRA.
[E] FALSA. Temos $f(x_1) \geq 0$ para $x_1 \in [a, c]$, enquanto $f(x_2) \leq 0$ para $x_2 \in [d, e]$.

Opção D

Questão 13

Solução: Seja S a soma das áreas, logo:

$$S = A_1 + A_2 + A_3$$

D acordo com o gráfico podemos calcular cada área:

$$S = 1 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 3 \cdot \log 5$$

Podemos reescrever esta expressão da seguinte maneira:

$$S = 1 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 + 2 \cdot \log 5 + \log 5$$

Aplicando as propriedades de logaritmos:

$$S = \log(2 \cdot 5) + 2(\log 3 + \log 5) \Rightarrow S = \log 10 + 2\log(3 \cdot 5)$$

Então:

$$S = 1 + 2\log 15$$

Opção D

Questão 14

Solução: Primeiro vamos achar o centro da circunferência dada:

$$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 25 = 0$$

Completando os quadrados:

$$x^2 + 4x + y^2 + 10y + 25 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 + (y+5)^2 - 25 + 25 = 0$$

Daí:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 25$$

O centro é portanto $(-2, -5)$. Como a circunferência passa pelo ponto P, simétrico de $(-1, 1)$ em relação ao eixo x, a distância entre os pontos corresponde ao raio. O ponto P é $(-1, -1)$ a distância PC será:

$$R = \sqrt{(-2-(-1))^2 + (-5-(-1))^2} \Rightarrow R = \sqrt{1+16} \Rightarrow R = \sqrt{17}$$

Escrevendo a equação da circunferência:

$$(x+2)^2 + (y+5)^2 = 17$$

Calculando as potências:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = 17$$

A equação então será:

$$x^2 + y^2 + 4x + 10y + 12 = 0$$

Opção B

Questão 15

Solução: Se 1 é raiz da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, então podemos escrever:

$$1^3 + a \cdot 1^2 - 1 + b = 0 \Rightarrow a + b = 0$$

E, também, se 2 é raiz da equação $x^3 + ax^2 - x + b = 0$, então podemos escrever:

$$2^3 + a \cdot 2^2 - 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -6$$

Substituindo a primeira na segunda equação:

$$4a + (-a) = -6 \Rightarrow a = -2$$

Portanto, $b = 2$, e a equação pode ser reescrita:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Fatorando esta equação em termos de suas raízes:

$$(x - x_1)(x - 1)(x - 2) = 0$$

Em que x_1 é a terceira raiz. Assim teremos:

$$(x - x_1)(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x - x_1x^2 + 3xx_1 - 2x_1 = 0$$

Portanto:

$$x^3 - (3 + x_1)x^2 + (3x_1 + 2)x - 2x_1 = 0$$

Como as duas equações representam o mesmo polinômio teremos:

$$-2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = -1$$

Podemos agora escrever $q(x)$:

$$q(x) = \frac{(x + 1)(x - 1)(x - 2)}{x - 1} \Rightarrow q(x) = (x + 1)(x - 2)$$

A expressão tem duas raízes reais e é negativa ou nula entre estas raízes, ou seja, para $-1 \leq x \leq 2$.

Opção C

Questão 16

Solução: Para efetuar uma rotação de 90° em um número complexo devemos multiplicá-lo por i, logo:

$$z = (1 + i)i \Rightarrow z = -1 + i$$

Calculando z^2:

$$z^2 = (-1 + i)^2 \Rightarrow z^2 = 1 - 2i - 1 \Rightarrow z^2 = -2i$$

Calculando z^3:

$$z^3 = z^2 \cdot z \Rightarrow (-2i) \cdot (-1 + i) \Rightarrow z^3 = 2 + 2i$$

Opção E

Questão 17

Solução: Fatorando 360 encontramos:

$$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

O conjunto $D(360)$ de divisores de 360 tem, portanto:

$$D(360) = (3+1)(2+1)(1+1) \Rightarrow D(360) = 24\,\text{divisores}$$

Como $12 = 2^2 \cdot 3$ podemos escrever 360 como sendo:

$$360 = (2^2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)$$

O número m de múltiplos de 12 que são divisores de 360 será portanto:

$$m = (1+1)(1+1)(1+1) \Rightarrow m = 8$$

A probabilidade fica então:

$$P = \frac{8}{24} \Rightarrow P = \frac{1}{3}$$

Opção C

Questão 18

Solução: Se 2 é raiz do polinômio podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para reescrevê-lo como um produto de dois polinômios:

$$\begin{array}{c|ccc} 2 & -5 & 1 & 2 \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

Então:

$$2x^3 - 5x^2 + x + 2 = (x-2)(2x^2 - x - 1)$$

As raízes de $2x^2 - x - 1 = 0$ são 1 e $-\frac{1}{2}$. Logo esta expressão é negativa para o intervalo $(-\frac{1}{2}, 1)$. Queremos $P(x) \geq 0$. Isto ocorre em dois casos:

- Caso 1: $x - 2 \geq 0$ e $2x^2 - x - 1 \geq 0$.
  Neste caso, temos como interseção que $x \geq 2$.

- Caso 2: $x - 2 \leq 0$ e $2x^2 - x - 1 \leq 0$.
  Neste caso, temos como interseção que $-\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

A união dos intervalos é, portanto, $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 2\}$.

Opção C

Questão 19

Solução: Seja ℓ a aresta da base e h a aresta lateral. Sabemos do enunciado que $\frac{\ell}{h} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Considerando S_B a área da base, o volume é:

$$V = S_B h \Rightarrow V = 6\ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4} h$$

Mas $\ell = h\frac{\sqrt{3}}{3}$, daí:

$$V = 3\left(h\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h \Rightarrow V = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Seja V' o volume quando aumentamos a aresta da base em 2 cm. Ou seja:

$$V' = 3(\ell + 2)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} h$$

Como $V' = V + 108$ teremos:

$$3(\ell + 2)^2 \frac{\sqrt{3}}{2} h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 108$$

Lembrando que $\ell = h\frac{\sqrt{3}}{3}$ temos:

$$3\left(h\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 108$$

Desenvolvendo:

$$3\left(\frac{h^2}{3} + 4h\frac{\sqrt{3}}{3} + 4\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} h = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} + 108$$

Multiplicando toda a equação por 2 e aplicando a propriedade distributiva:

$$\left(h^2 + 4h\sqrt{3} + 12\right) \cdot \sqrt{3} h = h^3\sqrt{3} + 216$$

Aplicando mais uma vez a propriedade distributiva:

$$\sqrt{3}h^3 + 12h^2 + 12\sqrt{3}h = h^3\sqrt{3} + 216$$

Finalmente:

$$12h^2 + 12\sqrt{3}h - 216 = 0 \Rightarrow h^2 + \sqrt{3}h - 18 = 0$$

Calculando h:

$$h_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 4 \cdot 1 \cdot (-18)}}{2 \cdot 1}$$

Então:

$$h_{1,2} = \frac{-\sqrt{3} \pm 5\sqrt{3}}{2}$$

Temos:

$$h_1 = 2\sqrt{3} \quad \text{e} \quad h_2 = -3\sqrt{3}$$

Mas $h > 0$, logo h_1 é que vale. Calculando ℓ:

$$\ell = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \ell = 2\,\text{cm}$$

Por fim, voltando ao volume original:

$$V = h^3 \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = 24\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow V = 36\,\text{cm}^3$$

Opção B

Questão 20

Solução: Como os círculos são tangentes entre si, a área total protegida S é a soma das áreas de cada círculo de raios r_A, r_B e r_C das áreas protegidas por A, B e C respectivamente:

$$S = \pi r_A^2 + \pi r_B^2 + \pi r_C^2$$

Falta calcular os raios. Façamos:

$$\begin{cases} r_A + r_B = 9 \\ r_A + r_C = 6 \\ r_B + r_C = 8 \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever:

$$r_B = 9 - r_A$$

Então:

$$\begin{cases} r_A + r_C = 6 \\ 9 - r_A + r_C = 8 \end{cases}$$

Somando as duas equações:

$$9 + 2r_C = 14 \Rightarrow r_C = \frac{5}{2}\,\text{km}$$

Ou seja, $r_A = \frac{7}{2}$ km e $r_B = \frac{11}{2}$ km. Daí:

$$S = \pi\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{11}{2}\right)^2 + \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Teremos:

$$S = \frac{\pi}{4}\left(49 + 121 + 25\right) \Rightarrow S = \frac{195\pi}{4}$$

Opção D