Soluções Comentadas
Matemática
Curso Mentor
Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Escola Naval
PSAEN/CPAEN

Barbosa, L.S.
leonardosantos.inf@gmail.com

13 de setembro de 2013

Sumário

Parte I

Provas

Capítulo 1

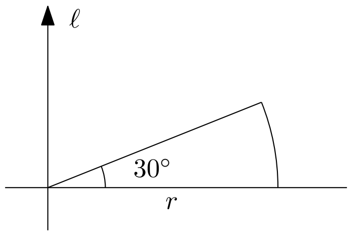
Prova 2012 — Amarela

1) Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$. É verdade afirmar que
(A) f tem um ponto de mínimo em $]-\infty, 0[$.
(B) f tem um ponto de inflexão em $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.
(C) f tem um ponto de máximo em $[0, +\infty[$.
(D) f é crescente em $[0, 1]$.
(E) f é decrescente em $[-1, 2]$.

2) Os números reais a, b, c, d, f, g, h constituem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Se $e^{\det A} = \lim_{y\to+\infty}(1 + \frac{2}{y})^{\frac{y}{9}}$ onde A é a matriz $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & d & d^2 \end{pmatrix}$ e $h = \sum_{n=3}^{+\infty}(\frac{1}{4})^n$ então o valor de $(b - 2g)$ vale
(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{21}{26}$ (C) $-\frac{49}{48}$ (D) $\frac{15}{16}$ (E) $\frac{31}{48}$

3) Considere a função $f(x) = \ln(\sec x + \tan x) + 2\,\mathrm{sen}\,x$, resultado de $\int[(f'(x))^2 + 2 - 2\cos 2x]dx$ é
(A) $\tan x + 8x + 2\,\mathrm{sen}\,2x + C$
(B) $\sec x + 6x + C$
(C) $\sec x - 2x - \mathrm{sen}\,2x + C$
(D) $\tan x + 8x + C$
(E) $\sec x + 6x - \mathrm{sen}\,2x + C$

4) Considere dois cones circulares retos de altura H e raio da base 1 cm, de modo que o vértice de cada um deles é o centro da base do outro. O volume comum aos dois cones coincide com o volume do sólido obtido pela rotação do setor circular, sombreado na figura abaixo, em torno do eixo ℓ. O valor de H é, em cm,



(A) $(2+\sqrt{3})r^3$ (B) $2\sqrt{3}r^3$ (C) $\frac{4}{3}r^3$ (D) $2r^3$ (E) $4r^3$

5) Sejam A e B conjuntos de números reais tais que seus elementos constituem, respectivamente, o domínio da função $f(x) = \ln(2+x+3|x|-|x+1|)$ e a imagem da função $g(x) = \frac{\sqrt{2(x+|x-2|)}}{2}$. Pode-se afirmar que
(A) $A = B$
(B) $A \cap B = \emptyset$
(C) $A \supset B$
(D) $A \cap B = \mathbb{R}_+$
(E) $A - B = \mathbb{R}_-$

6) Uma esfera confeccionada em aço é usada em um rolamento de motor de um navio da Marinha do Brasil. Se o raio da esfera mede $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}}$ cm, então seu volume vale
(A) $45 \cdot 10^{-3}\pi$ dm^3
(B) $0,45 \cdot 10^{-3}\pi$ dm^3
(C) $60 \cdot 10^{-3}\pi$ dm^3
(D) $0,15 \cdot 10^{3}\pi$ dm^3
(E) $60 \cdot 10^{3}\pi$ dm^3

7) Uma lata de querosene tem a forma de um cilindro circular reto cuja base tem raio R. Colocam-se três moedas sobre a base superior da lata, de modo que estas sao tangentes entre si e tangentes à borda da base, não existindo folga. Se as moedas têm raio a e encontram-se presas, então o valor de R em função de a, vale
(A) $\frac{(1+2\sqrt{3})a}{3}$
(B) $\frac{(3+2\sqrt{3})a}{3}$
(C) $\frac{(3+\sqrt{3})a}{3}$
(D) $(1+2\sqrt{3})a$
(E) $(3+2\sqrt{3})a$

8) A soma dos quadrados das raízes da equação $|\operatorname{sen} x| = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$, quando $0 < x < 2\pi$ vale
(A) $\frac{49}{36}\pi^2$ (B) $\frac{49}{9}\pi^2$ (C) $\frac{7}{3}\pi^2$ (D) $\frac{14}{9}\pi^2$ (E) $\frac{49}{6}\pi^2$

9) Nas proposições abaixo, coloque (V) no parênteses à esquerda quando a proposição for verdadeira e (F) quando for falsa.
( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
( ) Se $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$ e $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot\vec{w}$, então $\vec{v} = \vec{w}$, onde $\vec{u}\cdot\vec{v}$ representa o produto escalar entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{v}$.
( ) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores do $\mathbb{R}^3$, então eles são paralelos $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
( ) Se $\vec{u} = (3,0,4)$ e $\vec{v} = (2,\sqrt{8},2)$, então $\|u\| = 5$, $\|v\| = 4$ e $\tan\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$, onde θ representa o ãngulo formado pelos vetores pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.
( ) $\|\vec{u}+\vec{v}\| < \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ para todos os vetores do $\mathbb{R}^3$.
Lendo-se a coluna de parênteses da esquerda, de cima para baixo, encontra-se
(A) (F) (F) (F) (V) (V)
(B) (F) (V) (F) (F) (V)
(C) (V) (F) (V) (V) (F)
(D) (F) (F) (F) (V) (F)
(E) (V) (V) (V) (F) (F)

10) Um ponto $P(x, y)$ move-se ao longo da curva plana de equação $x^2+4y^2 = 1$, com $y > 0$. Se a abscissa x está variando a uma velocidade $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen} 4t$, pode-se afirmar que a aceleração da ordenada y tem por expressão
(A) $\frac{(1+x)^2 \operatorname{sen}^2 4t + 4x^3 \cos 4t}{8y^3}$
(B) $\frac{x^2 \operatorname{sen} 4t + 4x \cos^2 4t}{16y^3}$
(C) $\frac{-\operatorname{sen}^2 4t - 16xy^2 \cos 4t}{16y^3}$
(D) $\frac{x^2 \operatorname{sen} 4t - 4x \cos^2 4t}{8y^3}$
(E) $\frac{-\operatorname{sen}^2 4t + 16xy^2 \cos 4t}{16y^3}$

11) Considere π o plano que contém o centro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 4z + 13 = 0$ e a reta de equações paramétricas $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ O volume do tetraedro limitado pelo plano π e pelos planos coordenados é, em unidades de volume,
(A) $\frac{50}{3}$ (B) $\frac{50}{9}$ (C) $\frac{100}{3}$ (D) $\frac{200}{9}$ (E) $\frac{100}{9}$

12) Considere f e f' funções reais de variável real, deriváveis, onde $f(1) =$

$f'(1) = 1$. Qual o valor da derivada da função $h(x) = \sqrt{f(1 + \operatorname{sen} 2x)}$ para $x = 0$?
(A) -1 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) 0 (D) $-\frac{1}{3}$ (E) 1

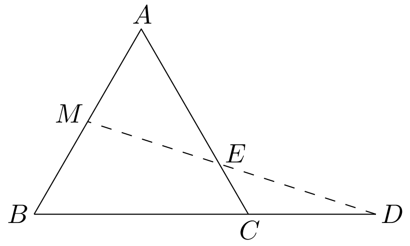
13) Considere a sequência $(a, b, 2)$ uma progressão aritmética e a sequência $(b, a, 2)$ uma progressão geométrica não constante, $a, b \in \mathbb{R}$. A equação da reta que passa pelo ponto (a, b) e pelo vértice da curva $y^2 - 2y + x + 3 = 0$ é
(A) $6y - x - 4 = 0$
(B) $2x - 4y - 1 = 0$
(C) $2x - 4y + 1 = 0$
(D) $x + 2y = 0$
(E) $x - 2y = 0$

14) O valor de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x} - \cos x)dx$ é
(A) $\frac{e^x}{2} - \frac{3}{2}$ (B) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{1}{2}$ (C) $\frac{e^x}{2} + \frac{3}{2}$ (D) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} - \frac{3}{2}$ (E) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{3}{2}$

15) Qual o valor da expressão $\sqrt{\csc^2 \pi x + \cot \frac{\pi x}{2} + 2}$, onde x é a solução da equação trigonométrica $\arctan x + \arctan(\frac{x}{x+1}) = \frac{\pi}{4}$ definida no conjunto $\mathbb{R} - \{-1\}$?
(A) $\sqrt{3}$ (B) -1 (C) $\frac{6+\sqrt{2}}{2}$ (D) 2 (E) $\frac{4+\sqrt{2}}{2}$

16) Considere como espaço amostral (Ω), o círculo no plano xy de centro na origem e raio igual a 2. Qual a probabilidade do evento $A = \{(x, y) \in \Omega \mid |x| + |y| < 1\}$?
(A) $\frac{2}{\pi}$ (B) 4π (C) $\frac{1}{\pi}$ (D) $\frac{1}{2\pi}$ (E) π

17) O triângulo da figura abaixo é equilátero, $\overline{AM} = \overline{MB} = 5$ e $\overline{CD} = 6$. A área do triângulo MAE vale



(A) $\frac{200\sqrt{3}}{11}$ (B) $\frac{100\sqrt{3}}{11}$ (C) $\frac{100\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{200\sqrt{2}}{11}$ (E) $\frac{200\sqrt{2}}{2}$

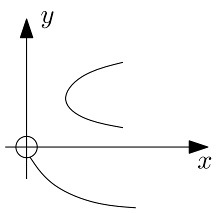
18) Seja p a soma dos módulos das raízes da equação $x^3 + 8 = 0$ e q o módulo do número complexo Z, tal que $Z\overline{Z} = 108$, onde $\overline{Z}$ é o conjugado de Z. Uma representação trigonométrica do número complexo $p + qi$ é

(A) $12(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$
(B) $20(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$
(C) $12(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6})$
(D) $20\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6})$
(E) $10(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3})$

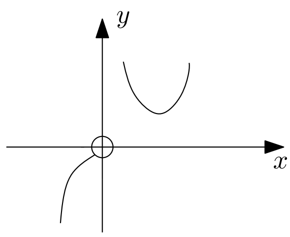
19) Seja m a menor raiz inteira da equação $[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}]! = 1$. Pode-se afirmar que o termo médio do desenvolvimento de $(\sqrt{y} - z^3)^{12m}$ é
(A) $\frac{12!}{6!6!}y^{18}z^{\frac{3}{2}}$ (B) $-\frac{12!}{6!6!}y^3z^{18}$ (C) $\frac{30!}{15!15!}y^{\frac{15}{2}}z^{45}$ (D) $-\frac{30!}{15!15!}y^{\frac{15}{2}}z^{45}$ (E) $\frac{12!}{6!6!}y^3z^{18}$

20) A figura que melhor representa o gráfico da função $x = |y|e^{\frac{1}{y}}$ é

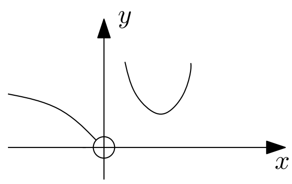
(A)



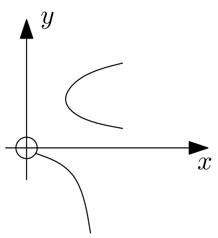
(B)



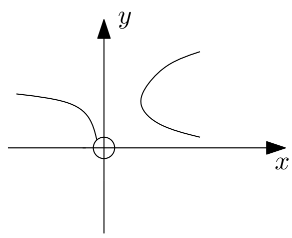
(C)



(D)



(E)



Parte II

Soluções

Capítulo 2

Solução 2012 — Amarela

Questão 1

Solução: Seja a função dada no enunciado:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5$$

Calculando a derivada da função:

$$f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot x^{4-1} - 4 \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 0$$

Então:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2$$

Igualando a derivada a zero temos os valores da abscissa que podem ser abscissas dos pontos de máximo, mínimo ou pontos de inflexão:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^3 - 12x^2 = 0$$

Teremos:

$$12x^2(x-1) = 0$$

Há portanto, dois valores que são possíveis candidatos:

$$12x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

E

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Vamos analisar o "entorno" das duas abscissas.
Para $x = 0$:

$$\begin{cases} x = 0_+ \Rightarrow f'(0_+) < 0 \\ x = 0_- \Rightarrow f'(0_-) < 0 \end{cases}$$

Como a declividade não muda, o ponto $(0,5)$ é um ponto de inflexão.
Para $x = 1$:

$$\begin{cases} x = 1_+ \Rightarrow f'(1_+) > 0 \\ x = 1_- \Rightarrow f'(1_-) < 0 \end{cases}$$

Como a declividade muda de decrescente para crescente com o aumento de x o ponto $(1,4)$ é um ponto de mínimo.
Agora precisamos derivar novamente a função para verificar se há algum outro ponto de inflexão, então:

$$f''(x) = 36x^2 - 24x$$

Mais uma vez, igualando a segunda derivada a zero, encontramos as possíveis abscissas de pontos de inflexão. Portanto:

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 36x^2 - 24x = 0$$

Daí:

$$12x(3x - 2) = 0$$

Então:

$$12x = 0 \Rightarrow x = 0$$

E

$$3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Vamos agora analisar a variação do sinal da segunda derivada.
Para $x = 0$:

$$\begin{cases} x = 0_+ \Rightarrow f''(0_+) < 0 \\ x = 0_- \Rightarrow f''(0_-) > 0 \end{cases}$$

Como a concavidade muda, o ponto $(0,5)$ é um ponto de inflexão. Já tínhamos visto isso anteriormente.
Para $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}_+ \Rightarrow f''(\frac{2}{3}_+) > 0 \\ x = \frac{2}{3}_- \Rightarrow f''(\frac{2}{3}_-) < 0 \end{cases}$$

Mais uma vez a concavidade muda. Portanto, o ponto $(\frac{2}{3}, f(\frac{2}{3}))$ é um ponto de inflexão. Analisando as opções vemos que B é a correta.

Opção B

Questão 2

Solução: Primeiramente vamos calcular o valor de h:

$$h = \sum_{n=3}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Daí, expandindo o somatório teremos:

$$h = \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \ldots$$

Esta soma é a soma de uma série geométrica infinita de razão $\frac{1}{4}$:

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{(\frac{1}{4})^3}{1-\frac{1}{4}} \Rightarrow S = \frac{1}{48}$$

Então teremos que $h = \frac{1}{48}$.
Sabemos do enunciado que a sequência $(a, b, c, d, f, g, \frac{1}{48})$ é uma P.A. de sete termos e, podemos então, reescrevê-la em função da razão r e do termo central d:

$$(d-3r, d-2r, d-r, d, d+r, d+2r, \frac{1}{48})$$

Concluímos então que:

$$d + 3r = \frac{1}{48}$$

Vamos agora ao determinante. Pelas propriedades de determinantes temos que $\det A = \det A^T$, ou seja, podemos transpor a matriz A e calcular seu determinante:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{pmatrix}$$

A matriz A^T é uma matriz de Vandermonde, então:

$$\det A^T = (b-a)(d-a)(d-b)$$

Substituindo os termos da sequência:

$$\det A^T = [d - 2r - (d-3r)][d - (d-3r)][d - (d-2r)]$$

Logo:

$$\det A^T = r \cdot 3r \cdot 2r \Rightarrow \det A^T = 6r^3$$

Vamos agora usar a informação:

$$e^{\det A} = \lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{y}\right)^{\frac{y}{9}}$$

Note que se $y \to +\infty$ então $\frac{y}{2} \to +\infty$. Façamos então uma "ligeira" mudança na expressão:

$$e^{\det A} = \lim_{\frac{y}{2} \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{y}{2}}\right)^{\frac{y}{2} \cdot \frac{2}{9}}$$

Aplicando a propriedade das potências em relação aos limites teremos:

$$e^{\det A} = \lim_{\frac{y}{2} \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{y}{2}}\right)^{\frac{y}{2}}\right]^{\frac{2}{9}} = \left[\lim_{\frac{y}{2} \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{y}{2}}\right)^{\frac{y}{2}}\right]^{\frac{2}{9}}$$

Mas sabemos que $\lim_{n \to +\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Então:

$$e^{\det A} = e^{\frac{2}{9}} \Rightarrow \det A = \frac{2}{9}$$

Voltando ao resultado encontrado anteriormente:

$$\det A^T = 6r^3 \Rightarrow 6r^3 = \frac{2}{9} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

Como $d + 3r = \frac{1}{48}$ teremos:

$$d = \frac{1}{48} - 1 \Rightarrow d = -\frac{47}{48}$$

O enunciado pede que se calcule $b - 2g$ ou seja:

$$b - 2g = d - 2r - 2(d + 2r) = -d - 6r$$

Substituindo os valores de r e d encontrados:

$$b - 2g = \frac{47}{48} - 2 \Rightarrow b - 2g = -\frac{49}{48}$$

Opção C

Questão 3

Solução: Vamos primeiro observar a função f:

$$f(x) = \ln(\sec x + \tan x) + 2 \operatorname{sen} x$$

Primeiro vamos desenvolver o logaritmando:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) + 2 \operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) + 2\operatorname{sen} x$$

$$f(x) = \ln(1+\operatorname{sen} x) - \ln(\cos x) + 2\operatorname{sen} x$$

Derivando a função f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}\cdot(\cos x) - \frac{1}{\cos x}\cdot(-\operatorname{sen} x) + 2\cos x$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + 2\cos x$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x} + 2\cos x$$

$$f'(x) = \frac{1+\operatorname{sen} x}{(1+\operatorname{sen} x)\cos x} + 2\cos x$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos x} + 2\cos x$$

Agora calculamos $(f')^2$:

$$[f'(x)]^2 = \left(\frac{1}{\cos x} + 2\cos x\right)^2$$

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{\cos^2 x} + 4 + 4\cos^2 x$$

O que queremos de fato é:

$$\int \left\{[f'(x)]^2 + 2 - 2\cos 2x\right\} dx =$$

Então:

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 4 + 4\cos^2 x + 2 - 2\cos 2x\right) dx =$$

$$= \int \left[\frac{1}{\cos^2 x} + 4 + 4\cos^2 x + 2 - 2(2\cos^2 x - 1)\right] dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 4 + 4\cos^2 x + 2 - 4\cos^2 x + 2\right) dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 8\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int 8 dx =$$

$$= \tan x + 8x + C$$

Opção D

Questão 4

Solução: A rotação do setor circular gera um sólido chamado de zona esférica, a menos de um cone na parte superior. O raio R do cone será:

$$R = r \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow R = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

A altura h deste cone será:

$$h = r \cdot \operatorname{sen} 30 \Rightarrow h = \frac{r}{2}$$

O volume de um cone é dado por $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Sendo assim o volume V_c do cone será:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{r}{2}$$

Portanto:

$$V_c = \frac{\pi r^3}{8}$$

O volume V_z de uma zona esférica é dado por:

$$V_z = \frac{\pi h}{6}[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]$$

Substituindo os valores em função de r, R e h teremos:

$$V_z = \frac{\pi \cdot \frac{r}{2}}{6} \left\{ 3 \left[\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + r^2 \right] + \left(\frac{r}{2}\right)^2 \right\}$$

Desenvolvendo:

$$V_z = \frac{\pi r}{12} \left\{ 3 \left[\frac{3r^2}{4} + r^2 \right] + \frac{r^2}{4} \right\}$$

Então:

$$V_z = \frac{\pi r}{12} \left\{ \frac{21r^2}{4} + \frac{r^2}{4} \right\} \Rightarrow V_z = \frac{11\pi r^3}{24}$$

O volume V_s do sólido gerado então pela rotação do setor circular será:

$$V_s = V_z - V_c \Rightarrow V_s = \frac{11\pi r^3}{24} - \frac{\pi r^3}{8} \Rightarrow V_s = \frac{\pi r^3}{3}$$

Do enunciado temos que este volume coincide com a interseção de dois cones de modo que o vértice de um seja o centro da base do outro e vice-versa.

Assim os dois se interceptam na metade da altura e geram uma interseção que corresponde a $\frac{1}{4}$ do volume de um dos cones:

$$V = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot H \Rightarrow V = \frac{\pi H}{12}$$

Como os volumes são iguais teremos:

$$\frac{\pi H}{12} = \frac{\pi r^3}{3} \Rightarrow H = 4r^3$$

Opção E

Questão 5

Solução: Seja a função f dada no enunciado. Como há um módulo, devemos separar em casos e verificar o que ocorre com a expressão que aparece no logaritmando da função f. Usando a definição de módulo teremos:

$$|x| = \begin{cases} x & , \quad x > 0 \\ -x & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

E

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & , \quad x > -1 \\ -x-1 & , \quad x \leq -1 \end{cases}$$

Caso 1: $x > 0$ e $x + 1 > 0$
Neste caso, da interseção das condições anteriores, temos que $x > 0$. A função f então fica:

$$f(x) = \ln(2 + x + 3x - (x + 1)) \Rightarrow f(x) = ln(3x + 1)$$

Para que f exista, seu logaritmando deve ser:

$$3x + 1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3}$$

Mas isto só vale se $x > 0$. Logo temos o primeiro intervalo I_1 que constitui o domínio de f:

$$I_1 = (0, +\infty)$$

Caso 2: $x > 0$ e $x + 1 \leq 0$
Neste caso, a interseção das condições anteriores, é vazia. Logo:

$$I_2 = \emptyset$$

Caso 3: $x \leq 0$ e $x + 1 > 0$
Neste caso, da interseção das condições anteriores, temos que $-1 < x \leq 0$. A função f então fica:

$$f(x) = \ln(2 + x + 3 \cdot (-x) - (x + 1)) \Rightarrow f(x) = \ln(-3x + 1)$$

Para que f exista, seu logaritmando deve ser:

$$-3x + 1 > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$$

Mas isto só vale se $-1 < x \leq 0$. Assim:

$$I_3 = (-1, 0]$$

Caso 4: $x \leq 0$ e $x + 1 \leq 0$
Neste caso, da interseção das condições anteriores, temos que $x \leq -1$. A função f então fica:

$$f(x) = \ln(2 + x + 3 \cdot (-x) - (-x - 1)) \Rightarrow f(x) = \ln(-x + 3)$$

Para que f exista, seu logaritmando deve ser:

$$-x + 3 > 0 \Rightarrow x < 3$$

Mas isto só vale se $x \leq -1$. Assim:

$$I_4 = (-\infty, -1]$$

Podemos agora explicitar o domnio de f fazendo a união dos intervalos I_n encontrados:

$$A = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \Rightarrow A = \mathbb{R}$$

Repare que só isso já é suficiente para responder, pois qualquer outro conjunto numérico já é subconjunto de $\mathbb{R}$, inclusive o próprio $\mathbb{R}$.
Vamos agora analisar o conjunto imagem de g. Mais uma vez temos um módulo no interior do radical, daí:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & , \quad x > 2 \\ -x + 2 & , \quad x \leq 2 \end{cases}$$

Vamos aos casos:
Caso 1: $x > 2$
Neste caso teremos para a função g:

$$g(x) = -2 + \frac{\sqrt{2(x + x - 2)}}{2} \Rightarrow g(x) = -2 + \frac{\sqrt{4x - 4}}{2}$$

Fazendo as devidas simplificações teremos:

$$g(x) = -2 + \sqrt{x-1}$$

Repare que a parcela $\sqrt{x-1}$ é sempre positiva e seu menor valor ocorre para $x = 1$. Mas só podemos substituir valores tais que $x > 2$. O primeiro intervalo da imagem de g é:

$$B_1 = (-1, +\infty)$$

Caso 2: $x \leq 2$
Neste caso, a função g fica:

$$g(x) = -2 + \frac{\sqrt{2(x-x+2)}}{2} \Rightarrow g(x) = -2 + \frac{\sqrt{4}}{2}$$

Ou seja:

$$g(x) = -2 + \sqrt{x-1}$$

E o conjunto-imagem neste caso é o conjunto unitário $B_2 = \{-1\}$. O conjunto B então será:

$$B = B_1 \cup B_2 \Rightarrow B = [-1, +\infty)$$

Vemos então que B está contido em A, ou seja, $B \subset A$.

Opção C

Questão 6

Solução: Chamemos de R o raio da esfera. Portanto temos:

$$R = \sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado:

$$R^2 = \left(\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}\right)^2$$

Daí temos:

$$R^2 = 3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}} \Rightarrow \frac{R^2}{3} = \sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}$$

Elevando ao quadrado novamente:

$$\frac{R^4}{9} = 5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}} \Rightarrow \frac{R^4}{9} = 5 \cdot R$$

Temos então a seguinte equação:

$$R^4 = 45R$$

Teremos duas soluções:

$$R = 0 \quad \text{ou} \quad R^3 = 45$$

Vamos à expressão que dá o volume de uma esfera em função do seu raio:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Como o raio não é nulo teremos:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 45 \Rightarrow V = 60\pi \,\mathrm{cm}^3$$

Mudando a unidade:

$$V = 60\pi \times 10^{-3} \,\mathrm{dm}^3$$

Opção C

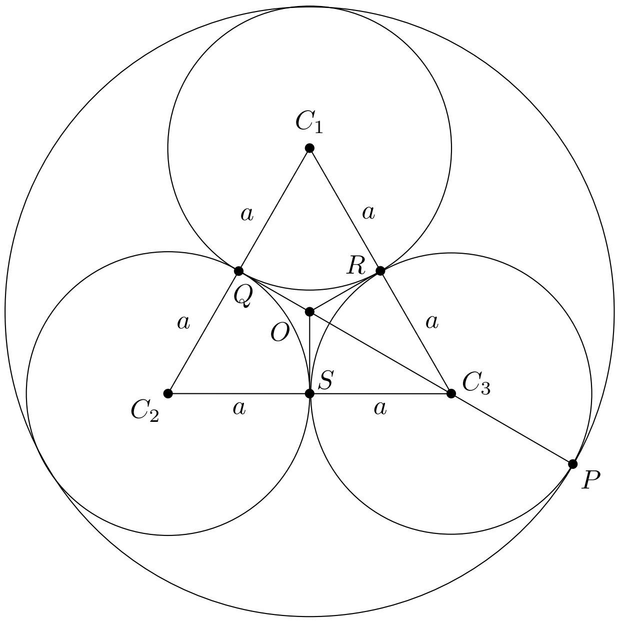
Questão 7

Solução: Pelo enunciado, o que temos é uma circunferência de raio R e três circunferências internas a esta e de raio a. Seja $OP = R$. Ligando os centros C_1, C_2 e C_3 das circunferências internas, temos o triângulo equilátero $C_1C_2C_3$ de lado $2a$. Repare que o ponto O é o centro da circunferência de raio R e baricentro do triângulo equilátero. Na verdade, o ponto O é circuncentro, pois QO, RO e OS são mediatrizes, uma vez que são os pontos de tangência entre as circunferências. Mas no caso de triângulos equiláteros estes dois pontos notáveis coincidem.
Assim OC_3 é bissetriz do ângulo interno, logo podemos calcular OS usando a tangente:

$$\tan 30^\circ = \frac{OS}{a} \Rightarrow OS = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Usando o teorema de pitágoras no triângulo OSC_3 teremos:

$$(OC_3)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + a^2$$



$$(OC_3)^2 = \frac{3a^2}{9} + a^2 \Rightarrow (OC_3)^2 = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow OC_3 = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$$

Assim temos que $OP = OC_3 + C_3P$, logo:

$$OP = \frac{2\sqrt{3}a}{3} + a \Rightarrow OP = \frac{(2\sqrt{3}+3)a}{3}$$

Opção B

Questão 8

Solução: Usando a definição de módulo temos:

$$|\operatorname{sen} x| = \begin{cases} \operatorname{sen} x & , \quad 0 < x \leq \pi \\ -\operatorname{sen} x & , \quad \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

Desta forma, devemos dividir em dois casos possíveis:
Caso 1: $0 < x \leq \pi$
Nesta situação teremos:

$$\operatorname{sen} x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

As raízes desta equação são -1 e $\frac{1}{2}$. Dividimos em duas novas equações:

1. $\operatorname{sen} x = -1$
   Resolvendo:
   $$x = \frac{3\pi}{2}$$

2. $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$
   Resolvendo:
$$x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

As soluções deste primeiro caso, usando as restrições, são então:

$$S_1 = \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Caso 2: $\pi < x \leq 2\pi$
Nesta situação teremos:

$$-\operatorname{sen} x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$$

As raízes desta equação são 1 e $-\frac{1}{2}$. Dividimos em duas novas equações:

1. $\operatorname{sen} x = 1$
   Resolvendo:
$$x = \frac{\pi}{2}$$

2. $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$
   Resolvendo:
$$x = \frac{7\pi}{6} \quad \text{ou} \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

As soluções deste segundo caso, usando as restrições, são então:

$$S_2 = \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$$

Queremos a soma S dos quadrados destes valores:

$$S = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{5\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{7\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{11\pi}{6}\right)^2$$

Daí:

$$S = \frac{\pi^2}{36} + \frac{25\pi^2}{36} + \frac{49\pi^2}{36} + \frac{121\pi^2}{36} \Rightarrow S = \frac{49\pi^2}{9}$$

Opção B

Questão 9

Solução: Vamos analisar cada uma das afirmações:

Afirmação 1:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Primeiro uma demonstração mais "trabalhosa". Sejam os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$. A soma $\vec{u}+\vec{v}$ vale, por definição:

$$\vec{u}+\vec{v} = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1)$$

O módulo $\|\vec{u}+\vec{v}\|$, portanto vale:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{(x_0+x_1)^2 + (y_0+y_1)^2 + (z_0+z_1)^2}$$

Então:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (x_0+x_1)^2 + (y_0+y_1)^2 + (z_0+z_1)^2$$

Desenvolvendo as potências:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 + y_0^2 + 2y_0y_1 + y_1^2 + z_0^2 + 2z_0z_1 + z_1^2$$

Analogamente:

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 + y_0^2 - 2y_0y_1 + y_1^2 + z_0^2 - 2z_0z_1 + z_1^2$$

Somando termo a termo:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2 + 2x_1^2 + 2y_1^2 + 2z_1^2$$

Então:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) + 2(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$$

E, finalmente:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$$

Assim:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$$

Uma segunda solução mais "simples" é dar um contraexemplo. Para o vetor nulo $\vec{v} = (0,0,0)$ teremos:

$$\left\|\vec{u}+\vec{0}\right\|^2 + \left\|\vec{u}-\vec{0}\right\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2$$

A afirmação 1, portanto, é **falsa**. Vamos à afirmação 2.

Afirmação 2:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$$

Fazendo $\vec{u} = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{w} = (x_2, y_2, z_2)$ e aplicando a definição de produto escalar:

$$x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1 = x_0x_2 + y_0y_2 + z_0z_2$$

Reescrevendo temos:

$$x_0(x_1 - x_2) + y_0(y_1 - y_2) + z_0(z_1 - z_2) = 0$$

Assim fica evidente que se $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ a equação é satisfeita. Outra solução é termos $x_0 = y_0 = 0$ e $z_1 = z_2$. Uma terceira solução é termos os três vetores perpendiculares entre si. A afirmação é portanto, **falsa**.

Afirmação 3:
A afirmação é **falsa**. Eles são paralelos se o produto **vetorial** é nulo.

Afirmação 4:
Basta aplicar a definição de módulo:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \Rightarrow \|\vec{u}\| = 5$$

E

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (\sqrt{8})^2 + 2^2} \Rightarrow \|\vec{v}\| = 4$$

Usando agora a definição de produto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$$

Substituindo os dados:

$$3 \cdot 2 + 0 \cdot \sqrt{8} + 4 \cdot 2 = 5 \cdot 4 \cdot \cos\theta$$

Então:

$$\cos\theta = \frac{7}{10}$$

Mas:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Logo:

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \frac{49}{100}} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

O seno é positivo porque o cosseno é positivo, indicando que o ângulo é agudo. Daí como $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$:

$$\tan\theta = \frac{\frac{\sqrt{51}}{10}}{\frac{7}{10}} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\sqrt{51}}{7}$$

A afirmação é, portanto, **verdadeira**.

Afirmação 5:
Mais uma vez vamos, primeiro, a uma solução mais "trabalhosa". Por mera "economia", vamos fazer uma solução para vetores em $\mathbb{R}^2$. Mas pode-se fazer o mesmo processo para o $\mathbb{R}^3$. Sejam os vetores $\vec{u} = (x_0, y_0)$ e $\vec{v} = (x_1, y_1)$. Pela definição de módulo, podemos escrever:

$$\sqrt{(x_0 + x_1)^2 + (y_0 + y_1)^2} < \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Desenvolvendo:

$$\sqrt{x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 + y_0^2 + 2y_0y_1 + y_1^2} < \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x_0^2 + 2x_0x_1 + x_1^2 + y_0^2 + 2y_0y_1 + y_1^2 < x_0^2 + y_0^2 + 2\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x_1^2 + y_1^2)} + x_1^2 + y_1^2$$

Fazendo os devidos cancelamentos:

$$2x_0x_1 + 2y_0y_1 < 2\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)(x_1^2 + y_1^2)}$$

Dividindo todos os termos por 2 e elevando ambos os membros ao quadrado:

$$(x_0x_1 + y_0y_1)^2 < (x_0^2 + y_0^2)(x_1^2 + y_1^2)$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$(x_0x_1)^2 + 2x_0x_1y_0y_1 + (y_0y_1)^2 < (x_0x_1)^2 + (y_0x_1)^2 + (y_0y_1)^2 + (x_0y_1)^2$$

Efetuando as devidas operações com as parcelas semelhantes:

$$2x_0x_1y_0y_1 < (y_0x_1)^2 + (x_0y_1)^2$$

Logo:

$$(y_0x_1)^2 - 2x_0x_1y_0y_1 + (x_0y_1)^2 > 0$$

Fatorando:

$$(y_0x_1 - x_0y_1)^2 > 0$$

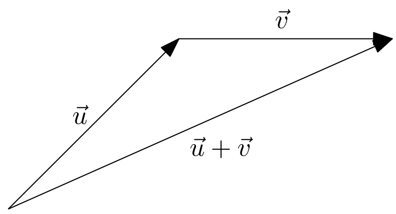
Na verdade temos que:

$$(y_0x_1 - x_0y_1)^2 \geq 0$$

Ou seja, a afirmação é **falsa**. Uma solução mais simples, por meio de um contraexemplo. Se $\vec{v} = \vec{0}$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\|$$

Finalmente, ainda é possível uma solução geométrica:



Note que a soma não é necessariamente menor que ambos. Pode ser igual a um deles – quando o outro é um vetor nulo – ou exatamente igual a soma dos módulos, se eles são paralelos.

Opção D

Questão 10

Solução: Tomemos a expressão da curva dada como base e a derivemos:

$$x^2 + 4y^2 = 1 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 8y\frac{dy}{dt} = 0$$

Como queremos $\frac{d^2y}{dt^2}$ derivamos mais uma vez:

$$2\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + 2x\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} \cdot \frac{dy}{dt} + 8y\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen} 4t$ então:

$$2\operatorname{sen}^2 4t + 2x\frac{d^2x}{dt^2} + 8\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8y\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Podemos derivar a expressão $\frac{dx}{dt} = \operatorname{sen} 4t$ e teremos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4\cos 4t$$

Substituindo na expressão anterior:

$$2\operatorname{sen}^2 4t + 8x\cos 4t + 8\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 8y\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Da derivada da curva dada obtemos $\frac{dy}{dt}$:

$$2x\frac{dx}{dt} + 8y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-2x\operatorname{sen} 4t}{8y}$$

Daí:

$$2\operatorname{sen}^2 4t + 8x\cos 4t + 8\left(\frac{-2x\operatorname{sen} 4t}{8y}\right)^2 + 8y\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Assim:

$$2\operatorname{sen}^2 4t + 8x\cos 4t + \frac{x^2\operatorname{sen}^2 4t}{2y^2} + 8y\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Multiplicando todos os termos por $2y^2$:

$$4y^2\operatorname{sen}^2 4t + 16xy^2\cos 4t + x^2\operatorname{sen}^2 4t + 16y^3\frac{d^2y}{dt^2} = 0$$

Isolando o que queremos:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-4y^2\operatorname{sen}^2 4t - 16xy^2\cos 4t - x^2\operatorname{sen}^2 4t}{16y^3}$$

Reunindo os termos semelhantes:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{(-x^2 - 4y^2)\operatorname{sen}^2 4t - 16xy^2\cos 4t}{16y^3}$$

Como $x^2 + 4y^2 = 1$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{-\operatorname{sen}^2 4t - 16xy^2\cos 4t}{16y^3}$$

Opção C

Questão 11

Solução: Primeiro vamos encontrar o centro da esfera "completando os quadrados" da esfera dada:

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 4z + 13 = 0$$

Daí:

$$(x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + (z-2)^2 - 4 + 13 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 1$$

Desta forma, o centro C da esfera é:

$$C(3, -1, 2)$$

Isolando t em cada uma das equações paramétricas da reta teremos:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$$

Desta forma, o vetor diretor da reta é $\vec{v} = (1, -1, 2)$ e temos um ponto da reta $P_0(2, 1, 3)$. Vamos então encontrar o vetor $\overrightarrow{P_0C} = \vec{u}$.

$$\vec{u} = (2-3, 1-(-1), 3-2) \Rightarrow \vec{u} = (-1, 2, 1)$$

Calculamos então o produto vetorial entre o vetores $\vec{v}$ e $\vec{u}$:

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Então:

$$\vec{v} \times \vec{u} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} - \vec{k} - 4\vec{i} - \vec{j}$$

Portanto:

$$\vec{v} \times \vec{u} = -5\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

Este é o vetor $\vec{n}$ normal ao plano π. Como $C \in \pi$, podemos usar a equação do plano:

$$-5x - 3y + z + d = 0$$

Substituindo o centro C da esfera na equação do plano π:

$$(-5) \cdot 3 - 3 \cdot (-1) + 2 + d = 0 \Rightarrow d = 10$$

Vamos agora encontrar a interseção do plano com os eixos coordenados. Fazemos isso zerando as outras coordenadas.
Para o eixo x:

$$-5x = -10 \Rightarrow x = 2$$

Para o eixo y:

$$-3y = -10 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$$

Para o eixo z:

$$z = -10$$

A base do tetraedro é, portanto, um triângulo retângulo de catetos 2 e $\frac{10}{3}$ e a altura do tetraedro vale 10. Daí:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot \frac{10}{3}}{2} \cdot 10 \Rightarrow V = \frac{100}{9}$$

Opção E

Questão 12

Solução: Vamos fazer $g(x) = 1 + \operatorname{sen} 2x$. Desta forma temos:

$$h(x) = \sqrt{f(g(x))} \Rightarrow h(x) = [f(g(x))]^{\frac{1}{2}}$$

Derivando h e aplicando a regra da cadeia:

$$h'(x) = \frac{1}{2}[f(g(x))]^{-\frac{1}{2}} \cdot [f(g(x))]'$$

Aplicando mais uma vez a regra da cadeia:

$$h'(x) = \frac{1}{2}[f(g(x))]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Substituindo as funções:

$$h'(x) = \frac{1}{2}[f(1 + 2\operatorname{sen} x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(g(x)) \cdot (2\cos 2x)$$

Para $x = 0$:

$$h'(0) = \frac{1}{2}[f(1 + 2\operatorname{sen} 0)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(1 + \operatorname{sen} 0) \cdot (2\cos 0)$$

Então:

$$h'(0) = \frac{1}{2}[f(1)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(1) \cdot 2$$

Portanto:

$$h'(0) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 \Rightarrow h'(0) = 1$$

Opção E

Questão 13

Solução: Como $(a, b, 2)$ é P.A. teremos:

$$b = \frac{a+2}{2}$$

Como $(b, a, 2)$ é P.G. teremos:

$$a^2 = 2b$$

Substituindo a segunda na primeira equação teremos:

$$a^2 = 2 \cdot \frac{a+2}{2} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

As raízes são $a' = 2$ ou $a'' = -1$. O que nos dá $b' = 2$ ou $b'' = \frac{1}{2}$, respectivamente. Como a P.G. não é constante teremos $(a, b) = (-1, \frac{1}{2})$.
A curva dada é uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo das abscissas e seu vértice possui coordenadas $(x_V, y_V) = (-\frac{\Delta}{4A}, -\frac{B}{2A})$, em que B e A são os coeficientes da curva. Então:

$$x_V = -\frac{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3)}{4 \cdot (-1)} \Rightarrow x_V = -2$$

$$y_V = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} \Rightarrow y_V = 1$$

Queremos então a reta que passa por $(-1, \frac{1}{2})$ e por $(-2, 1)$. Então seu coeficiente angular m será:

$$m = \frac{\frac{1}{2} - 1}{-1 - (-2)} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

A equação da reta então é:

$$y = -\frac{1}{2}x + n$$

Como $(-2, 1)$ pertence a reta teremos:

$$1 = -\frac{1}{2} \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 0$$

Finalmente:

$$y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow x + 2y = 0$$

Opção D

Questão 14

Solução: Aplicando as propriedades de integrais teremos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{2x} - \cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

Teremos então:

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}dx - \operatorname{sen} x|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

Daí:

$$= \frac{e^{2x}}{2} - \operatorname{sen} x = \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{1}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} + \operatorname{sen} 0 = \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{3}{2}$$

Portanto:

$$= \frac{e^{\pi}}{2} - \frac{3}{2}$$

Opção A

Questão 15

Solução: Para facilitar a ideia vamos fazer as seguintes substituições:

$$\arctan x = \alpha \quad \text{e} \quad \arctan\frac{x}{x+1} = \beta$$

Daí concluímos que:

$$\tan\alpha = x \quad \text{e} \quad \tan\beta = \frac{x}{x+1}$$

E também que:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\alpha+\beta) = 1$$

Mas:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Logo:

$$1 = \frac{x + \frac{x}{x+1}}{1 - x\cdot\frac{x}{x+1}}$$

Simplificando:

$$1 = \frac{x(x+1) + x}{x + 1 - x^2}$$

E aí:

$$x^2 + x + x = x + 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

Esta equação possui duas raízes: -1 e $\frac{1}{2}$. Como -1 está fora de questão temos $x = \frac{1}{2}$ como solução. Voltando então à pergunta do enunciado:

$$\sqrt{\csc^2 \pi x + \cot \frac{\pi x}{2} + 2} =$$

Portanto:

$$= \sqrt{\csc^2\left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) + \cot\left(\frac{\pi \cdot \frac{1}{2}}{2}\right) + 2} = \sqrt{1+1+2} = 2$$

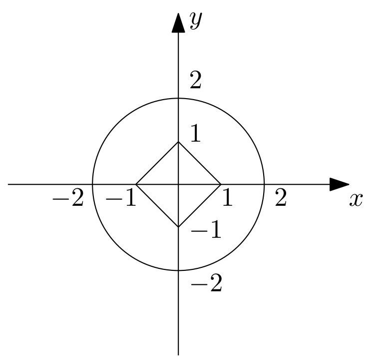
Opção D

Questão 16

Solução: A área S de um círculo de raio 2 é de:

$$S = \pi \cdot 2^2 \Rightarrow S = 4\pi$$

A região delimitada pelo conjunto A é o interior de um quadrado de lado $\sqrt{2}$. Pois é limitada pelas retas que cruzam os eixos cartesianos nos pontos $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$ em pares de pontos. Veja a figura:



Isto acontece graças aos módulos. São quatro casos:

1. $x > 0$ e $y > 0$:

$$x + y < 1 \Rightarrow y < -x + 1$$

2. $x > 0$ e $y < 0$:

$$x - y < 1 \Rightarrow y > x - 1$$

3. $x < 0$ e $y < 0$:

$$-x - y < 1 \Rightarrow y > -x - 1$$

4. $x < 0$ e $y > 0$:

$$-x + y < 1 \Rightarrow y < x + 1$$

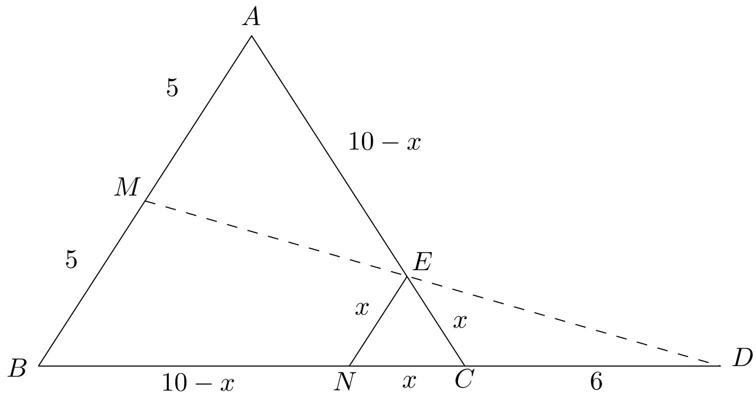
Daí a probabilidade P é proporcional à razão das áreas do quadrado e do círculo, então:

$$P = \frac{(\sqrt{2})^2}{4\pi} \Rightarrow P = \frac{1}{2\pi}$$

Opção D

Questão 17

Solução: Como o triângulo ABC é equilátero, ao traçarmos uma paralela a AB passando por E temos um triângulo ECN também equilátero. Os triângulos END e BMD são semelhantes, pois $EN \parallel BM$ e o ângulo $\hat{D}$ é comum. Daí:



$$\frac{EN}{BM} = \frac{ND}{BD}$$

Substituindo os valores de acordo com a figura:

$$\frac{x}{5} = \frac{6 + x}{16}$$

Então:

$$16x = 30 + 5x \Rightarrow 11x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{11}$$

Podemos então calcular o valor de AE:

$$AE = 10 - \frac{30}{11} \Rightarrow AE = \frac{80}{11}$$

Calculando a área S do triângulo AEM teremos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AE \cdot \operatorname{sen} 60^\circ$$

Então:

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{80}{11} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{100\sqrt{3}}{11}$$

Opção B

Questão 18

Solução: Consideremos a equação dada no enunciado:

$$x^3 + 8 = 0$$

A solução real é -2, cujo módulo é 2. E, como são três raízes complexas, todas têm que estar sobre um círculo de raio igual a 2 no plano complexo. Daí, a soma p dos módulos das raízes é $p = 6$. Façamos então:

$$Z = a + bi$$

Assim teremos:

$$\overline{Z} = a - bi$$

Daí:

$$Z\overline{Z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

Portanto:

$$a^2 + b^2 = 108$$

Mas:

$$q = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow q^2 = 108 \Rightarrow q = 6\sqrt{3}$$

Então:

$$p + qi = 6 + 6\sqrt{3}i \Rightarrow p + qi = 12\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

E podemos escrever:

$$p + qi = 12\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Opção A

Questão 19

Solução: Há duas maneiras de um fatorial ser igual a 1. Temos $0! = 1$ e $1! = 1$. Ou seja, pela primeira opção:

$$\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right] = 0$$

Há duas soluções possíveis:

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{7}{5}$$

A segunda opção:

$$\left[\frac{(x-1)(5x-7)}{3}\right] = 1 \Rightarrow (x-1)(5x-7) = 3$$

Desenvolvendo:

$$5x^2 - 7x - 5x + 7 - 3 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 12x + 4 = 0$$

As soluções possuem o seguinte formato:

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4}}{2 \cdot 5}$$

Então:

$$x_1 = \frac{12+8}{10} \Rightarrow x_1 = 2$$

E

$$x_2 = \frac{12-8}{10} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{5}$$

A menor solução é $m = 1$. Voltando ao binômio, que chamaremos de B, teremos:

$$B = (\sqrt{y} - z^3)^{12}$$

O binômio tem 13 termos, logo o termo central e o sétimo termo. Usando a fórmula do binômio de Newton para $(x+a)^n$:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot a^k$$

Então:

$$T_{6+1} = \binom{12}{6} \cdot (\sqrt{y})^{12-6} \cdot [(-z)^3]^6$$

Portanto:

$$T_7 = \frac{12!}{6!6!} \cdot y^3 \cdot z^{18}$$

Opção E

Questão 20

Solução: Devido ao módulo temos que separar em dois casos:

$$x = ye^{\frac{1}{y}}, \quad y \geq 0$$

E

$$x = -ye^{\frac{1}{y}}, \quad y < 0$$

Vamos analisar primeiro o caso em que $y \geq 0$.
Para $y = \frac{1}{3}$ teremos:

$$x = \frac{1}{3} \cdot e^3 \Rightarrow x = \frac{e^3}{3} \Rightarrow x \approx 6,695$$

Façamos $y = \frac{1}{2}$ teremos:

$$x = \frac{1}{2} \cdot e^2 \Rightarrow x = \frac{e^2}{2} \Rightarrow x \approx 3,694$$

Façamos $y = 1$. Neste caso temos:

$$x = 1 \cdot e^1 \Rightarrow x = e \Rightarrow x \approx 2,718$$

Para $y = 2$ teremos:

$$x = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{e} \Rightarrow x \approx 3,297$$

Como isso, já temos quatro pontos para marcar: $(6,695; \frac{1}{3})$, $(3,694; \frac{1}{2})$, $(2,718; 1)$ e $(3,297; 2)$. Já temos um esboço de como se comporta o gráfico para $y \geq 0$.
Passaremos agora a analisar quando $y < 0$.
Para $y = -\frac{1}{3}$ teremos:

$$x = -\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot e^{-3} \Rightarrow x = \frac{1}{3e^3} \Rightarrow x \approx 0,0166$$

Façamos, agora, $y = -\frac{1}{2}$ teremos:

$$x = -\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{2e^2} \Rightarrow x \approx 0,0677$$

Para $y = -1$. Temos:

$$x = -(-1) \cdot e^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{e} \Rightarrow x \approx 0,368$$

Se $y = -2$ teremos:

$$x = -(-2) \cdot e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{e}} \Rightarrow x \approx 1,213$$

Agora, temos mais quatro pontos: $(0,0166; -\frac{1}{3})$, $(0,0677; -\frac{1}{2})$, $(0,368; -1)$ e $(1,213; -2)$. Marcando estes oito pontos temos uma noção aproximada da função. Como observação vale a pena perceber que a função só existe para $x > 0$. Desta maneira já poderíamos eliminar três das cinco opções. Além disso, das que sobram, a única diferença entre elas é com respeito a $y < 0$. O que já reduziria a nossa análise ao menos pela metade.

Opção A