Soluções Comentadas
Matemática
Curso Mentor
Provas de Matemática do Concurso de Admissão à Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM)

Barbosa, L.S.

leonardosantos.inf@gmail.com

28 de janeiro de 2014

Sumário

Parte I

Provas

Capítulo 1

Prova 2012/2013

1ª Questão
Num quadrado de lado a, inscreve-se um círculo; nesse círculo se inscreve um novo quadrado e nele um novo círculo. Repetindo a operação indefinidamente, tem-se que a soma dos raios de todos os círculos é:
(a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-1)$
(b) $a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$
(c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}+1)$
(d) $a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$
(e) $2a(\sqrt{2}+1)$

2ª Questão
Se os números reais x e y são soluções da equação $(\frac{1+i}{1-i})^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$, então $5x+15y$ é igual a:
(a) 0. (b) -1. (c) 1. (d) 2. (e) $-\sqrt{2}$.

3ª Questão
Um ponto $P=(x,y)$, no primeiro quadrante do plano xy, situa-se no gráfico de $y=x^2$. Se θ é o ângulo de inclinação da reta que passa por P e pela origem, então o valor da expressão $1+y$ (onde y é a ordenada de P) é:
(a) $\cos\theta$. (b) $\cos^2\theta$. (c) $\sec^2\theta$. (d) $\tan^2\theta$. (e) $\operatorname{sen}\theta$.

4ª Questão
O valor do $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+x})$ é:
(a) -2. (b) -1. (c) 0. (d) 1. (e) 2.

5ª Questão
$P(x)$ é um polinômio de coeficientes reais e menor grau com as propriedades

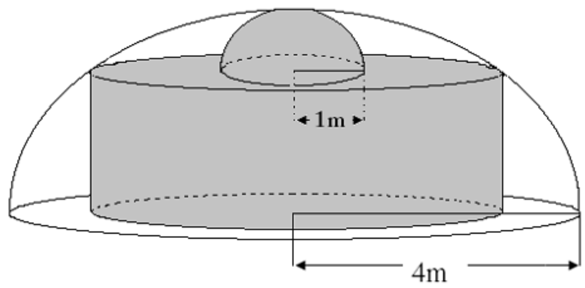
abaixo:

- os números $r_1 = 1$, $r_2 = i$ e $r_3 = 1 - i$ são raízes da equação $P(x) = 0$;
- $P(0) = -4$.

Então, $P(-1)$ é igual a:
(a) 4. (b) -2. (c) -10. (d) 10. (e) -40.

6ª Questão
O número de bactérias B, numa cultura, após t horas, é $B = B_0 e^{kt}$, onde k é uma constante real. Sabendo-se que o número inicial de bactérias é 100 e que essa quantidade duplica em $t = \frac{\ln 2}{2}$ horas, então o número N de bactérias, após 2 horas, satisfaz:
(a) $800 < N < 1600$.
(b) $1600 < N < 8100$.
(c) $8100 < N < 128000$.
(d) $128000 < N < 256000$.
(e) $256000 < N < 512000$.

7ª Questão
Constrói-se um depósito, na forma de um sólido V, dentro de uma semiesfera de raio 4 m. O depósito é formado por uma semiesfera de raio 1 m sobreposta a um cilindro circular, dispostos conforme a figura.



Então a área da superfície total de V, em m^2, é igual a:
(a) $(20 + 14\sqrt{2})\pi$.
(b) $(17 + 4\sqrt{10})\pi$.
(c) $(8 + 4\sqrt{7})\pi$.
(d) $(21 + 7\sqrt{6})\pi$.
(e) $(15 + 6\sqrt{7})\pi$.

8ª Questão

Se $\det \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{vmatrix} = -\frac{1}{3}$, então o valor de $3\operatorname{sen}(x+y)+\tan(x+y)-\sec(x+y)$, para $\frac{\pi}{2} \leq x+y \leq \pi$, é igual a:

(a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 2 (d) 3 (e) $\frac{1}{2}$

9ª Questão

O gráfico da função contínua $y = f(x)$, no plano xy, é uma curva situada acima do eixo x para $x > 0$ e possui a seguinte propriedade:

> "A área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $a \leq x \leq b$ $(a > 0)$ é igual à área entre a curva e o eixo x no intervalo $ka \leq x \leq kb$ $(k > 0)$".

Se a área da região entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x para x no intervalo $1 \leq x \leq 3$ é o número A então a área entre a curva $y = f(x)$ e o eixo x no intervalo $9 \leq x \leq 243$ vale:

(a) $2A$ (b) $3A$ (c) $4A$ (d) $5A$ (e) $6A$

10ª Questão

Durante o Treinamento Físico Militar na Marinha, o uniforme usado é tênis branco, short azul e camiseta branca. Sabe-se que um determinado militar comprou um par de tênis, dois shortes e três camisetas por R\$ $100,00$. E depois, dois pares de tênis, cinco shortes e oito camisetas por R\$ $235,00$. Quanto, então, custaria para o militar um par de tênis, um short e uma camiseta?

(a) R\$ $50,00$. (b) R\$ $55,00$. (c) R\$ $60,00$. (d) R\$ $65,00$. (e) R\$ $70,00$.

11ª Questão

Se $\tan x + \sec x = \frac{3}{2}$, o valor de $\operatorname{sen} x + \cos x$ vale:

(a) $-\frac{7}{13}$ (b) $\frac{5}{13}$ (c) $\frac{12}{13}$ (d) $\frac{15}{13}$ (e) $\frac{17}{13}$

12ª Questão

Dois observadores que estão em posições coincidentes com os pontos A e B, afastados 3 km entre si, medem simultaneamente o ângulo de elevação de um balão, a partir do chão, como sendo 30° e 75°, respectivamente. Se o balão está diretamente acima de um ponto no segmento de reta entre A e B, então a altura do balão, a partir do chão, em km, é:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $\frac{2}{5}$ (d) $\frac{2}{3}$ (e) $\frac{3}{2}$

13ª Questão

Um muro será construído para isolar a área de uma escola que está situada

a 2 km de distância da estação do metrô. Esse muro será erguido ao longo de todos os pontos P, tais que a razão entre a distância de P à estação do metrô e a distância de P à escola é constante e igual a $\sqrt{2}$.
Em razão disso, dois postes, com uma câmera cada, serão fixados nos pontos do muro que estão sobre a reta que passa pela escola e é perpendicular à reta que passa pelo metrô e pela escola. Então, a distância entre os postes, em km, será:
(a) 2. (b) $2\sqrt{2}$. (c) $2\sqrt{3}$. (d) 4. (e) $2\sqrt{5}$.

14ª Questão
A empresa Alfa Tecidos dispõe de 5 teares que funcionam 6 horas por dia, simultaneamente. Essa empresa fabrica 1800 m de tecido, com $1,20$ m de largura em 4 dias. Considerando que um dos teares parou de funcionar, em quantos dias, aproximadamente, a tecelagem fabricará 2000 m do mesmo tecido, com largura de $0,80$ m, e com cada uma de suas máquinas funcionando 8 horas por dia?
(a) 2 dias. (b) 3 dias. (c) 4 dias. (d) 5 dias. (e) 6 dias.

15ª Questão
O código Morse, desenvolvido por Samuel Morse, em 1835, é um sistema de representação que utiliza letras, números e sinais de pontuação através de um sinal codificado intermitentemente por pulsos elétricos, perturbações sonoras, sinais visuais ou sinais de rádio. Sabendo-se que um código semelhante ao código Morse trabalha com duas letras pré-estabelecidas, ponto e traço, e codifica com palavras de 1 a 4 letras, o número de palavras criadas é:
(a) 10. (b) 15. (c) 20. (d) 25. (e) 30.

16ª Questão
Um cone foi formado a partir de uma chapa de aço, no formato de um setor de 12 cm de raio e ângulo central de 120°. Então, a altura do cone é:
(a) $2\sqrt{2}$. (b) $4\sqrt{2}$. (c) $6\sqrt{2}$. (d) $8\sqrt{2}$. (e) $12\sqrt{2}$.

17ª Questão
A matriz $A = (a_{ij})_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ define em $\mathbb{R}^3$ os vetores $\vec{v}_i = a_{i1}\vec{i} + a_{i2}\vec{j} + a_{i3}\vec{k}$, $1 \leq i \leq 3$. Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são dois vetores em $\mathbb{R}^3$ satisfazendo:

- $\vec{u}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_2$ e $|\vec{u}| = 3$;
- $\vec{v}$ é paralelo, tem mesmo sentido de $\vec{v}_3$ e $|\vec{u}| = 2$.

Então, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado por:
(a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}+1)\vec{k})$
(b) $3\sqrt{2}(\vec{i} - \vec{j} + (\sqrt{2}-1)\vec{k})$
(c) $3(\sqrt{2}\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k})$
(d) $2\sqrt{2}(\vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + (1-\sqrt{2})\vec{k})$
(e) $-3\sqrt{2}(\vec{i} + \vec{j} - (\sqrt{2}-1)\vec{k})$

18ª Questão
O gráfico de $f(x) = (x-3)^2 \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$ tem uma assíntota horizontal r. Se o gráfico de f intercepta r no ponto $P = (a, b)$, então $a^2 + b \cdot e^{\operatorname{sen}^2 a} - 4a$ é igual a:
a) -3. b) -2. c) 3. d) 2. e) $\frac{1}{2}$

19ª Questão
O valor da integral $\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx$ é:
(a) $-\cos x + c$.
(b) $-\frac{1}{4}\cos 2x + c$.
(c) $-\frac{1}{2}\cos x + c$.
(d) $\frac{1}{4}\cos x + c$.
(e) $\frac{1}{2}\cos 2x + c$.

20ª Questão
O litro da gasolina comum sofreu, há alguns dias, um aumento de $7,7\%$ e passou a custar $2,799$ reais. Já o litro do álcool sofreu um aumento de $15,8\%$, passando a custar $2,199$ reais. Sabendo que o preço do combustível é sempre cotado em milésimos de real, pode-se afirmar, aproximadamente, que a diferença de se abastecer um carro com 10 litros de gasolina e 5 litros de álcool, antes e depois do aumento, é de:
(a) R\$ $2,00$. (b) R\$ $2,50$. (c) R\$ $3,00$. (d) R\$ $3,50$. (e) R\$ $4,00$.

Parte II

Soluções

Capítulo 2

Solução 2012/2013

Questão 1

Solução: Chamemos de ℓ_1 o lado do primeiro quadrado (o original), d_1 a diagonal do primeiro quadrado, r_1 o raio do primeiro círculo, etc. Assim teremos:

$$\ell_1 = a$$

E

$$r_1 = \frac{a}{2}$$

Agora teremos um quadrado inscrito neste círculo. Chamaremos o lado deste quadrado de ℓ_2 (por ser o segundo quadrado) e dentro dele um novo círculo cujo raio chamaremos de r_2. O lado do segundo quadrado se relaciona com a diagonal d_2 por meio do teorema de Pitágoras:

$$d_2^2 = \ell_2^2 + \ell_2^2 \Rightarrow \ell_2^2 = \frac{d_2^2}{2} \Rightarrow \ell_2 = \frac{d_2}{\sqrt{2}}$$

Mas a diagonal d_2 vale, em função de a:

$$d_2 = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \Rightarrow d_2 = a$$

Mais uma vez teremos a relação entre o lado do quadrado e o raio do círculo inscrito nele:

$$r_2 = \frac{\ell_2}{2} \Rightarrow r_2 = \frac{d_2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow r_2 = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Repetiremos o processo para ℓ_3:

$$d_3 = 2r_2 \Rightarrow d_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Daí calculamos ℓ_3:

$$\ell_3 = \frac{d_3}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ell_3 = \frac{a}{2}$$

Podemos calcular r_3:

$$r_3 = \frac{\ell_3}{2} \Rightarrow r_3 = \frac{a}{4}$$

Notamos que os raios seguem uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$r_1 = \frac{a}{2} \qquad r_2 = \frac{a}{2\sqrt{2}} \qquad r_3 = \frac{a}{4}$$

A soma S então de todos os raios valerá:

$$S = \frac{r_1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow S = \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow S = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

Efetuando as operações necessárias e racionalizando o denominador:

$$S = \frac{a\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} \Rightarrow S = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \Rightarrow S = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2}$$

Opção C

Questão 2

Solução: Vamos desenvolver a expressão dada:

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1+i$$

Teremos:

$$\frac{(1+i)^2}{(1-i)^2} + \frac{x-yi}{(x+iy)(x-yi)} = 1+i$$

Daí:

$$\frac{1+2i+i^2}{1-2i+i^2} + \frac{x-yi}{x^2-(iy)^2} = 1+i$$

Logo:

$$\frac{1+2i-1}{1-2i-1} + \frac{x-yi}{x^2+y^2} = 1+i \Rightarrow -1 + \frac{x-yi}{x^2+y^2} = 1+i$$

Reduzindo o primeiro membro da equação ao mesmo denominador:

$$\frac{-x^2-y^2+x-yi}{x^2+y^2} = 1+i$$

Separando a parte real e a parte imaginária no primeiro membro:

$$\frac{-x^2-y^2+x}{x^2+y^2}-\frac{yi}{x^2+y^2}=1+i$$

Então, igualando as respectivas partes reais e imaginárias, temos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{-x^2-y^2+x}{x^2+y^2}=1 \\ -\frac{y}{x^2+y^2}=1 \end{cases}$$

Da primeira equação podemos escrever:

$$\frac{-x^2-y^2+x}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \frac{-(x^2+y^2)}{x^2+y^2}+\frac{x}{x^2+y^2}=1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2}=2$$

Voltando ao sistema:

$$\begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2}=2 \\ -\frac{y}{x^2+y^2}=1 \end{cases}$$

Dividindo membro a membro temos:

$$\frac{\frac{x}{x^2+y^2}}{-\frac{y}{x^2+y^2}}=\frac{2}{1} \Rightarrow \frac{-x}{y}=2 \Rightarrow x=-2y$$

Voltando a primeira equação e substituindo esta relação encontrada:

$$\frac{-2y}{(-2y)^2+y^2}=2 \Rightarrow \frac{-2y}{5y^2}=2 \Rightarrow y=-\frac{1}{5}$$

Logo $x=\frac{2}{5}$. Daí:

$$5x+15y=5\cdot\frac{2}{5}+15\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)=2-3=-1$$

Opção B

Questão 3

Solução: Se P pertence ao gráfico de f, ele é da forma (x, x^2) e, se a reta passa por P e pela origem, sua taxa de variação (coeficiente angular) vale:

$$\tan\theta=\frac{x^2}{x} \Rightarrow \tan\theta=x$$

A ordenada y então vale $x^2=\tan^2\theta$, portanto:

$$1+y=1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

Opção C

Questão 4

Solução: Vamos desenvolver a expressão dada:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x+1-1}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x^2+x}\right)=$$

Agora basta fatorar:

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{0+1}=1$$

Opção D

Questão 5

Solução: Se $z\in\mathbb{C}$ e $z=a+bi$ é raiz do polinômio, então $\overline{z}=a-bi$ também é. Daí, podemos, a partir do enunciado, escrever o polinômio em sua forma fatorada:

$$P(x)=a(x-1)(x-i)(x+i)(x-(1-i))(x-(1+i))$$

Como $P(0)=-4$:

$$-4=a\cdot(0-1)\cdot(0-i)\cdot(0+i)\cdot(0-(1-i))\cdot(0-(1+i))$$

Calculando:

$$-4=-a\cdot(1+1)\Rightarrow a=2$$

Calculando $P(-1)$:

$$P(-1)=2\cdot(-1-1)\cdot(-1-i)\cdot(-1+i)\cdot(-1-(1-i))\cdot(-1-(1+i))$$

O que nos dá:

$$P(-1)=2\cdot(-2)\cdot(-1-i)\cdot(-1+i)\cdot(-2+i)\cdot(-2-i)$$

Finalmente:

$$P(-1)=-4\cdot(2)\cdot(5)\Rightarrow P(-1)=-40$$

Opção E

Questão 6

Solução: Poddemos escrever o número de bactérias por hora por meio da função dada:

$$B(t) = B_0 e^{kt}$$

Se a população inicial é de 100:

$$B(0) = B_0 \cdot e^{k \cdot 0} \Rightarrow 100 = B_0 \cdot e^0 \Rightarrow B_0 = 100$$

A quantidade duplica em $\frac{\ln 2}{2}$ horas, então:

$$B\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 100 \cdot e^{k \cdot \frac{\ln 2}{2}} \Rightarrow 200 = 100 \cdot 2^{\frac{k}{2}} \Rightarrow \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$$

Assim a função fica:

$$B(t) = 100e^{2t}$$

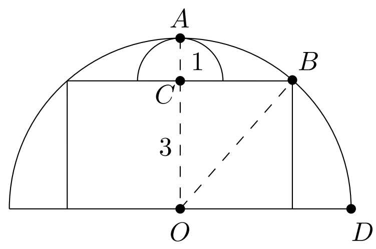
Para 2 horas:

$$B(2) = 100e^4 \Rightarrow B(2) \approx 5314,41$$

Opção B

Questão 7

Solução: Primeiro vamos "planificar" a figura.



Daí, temos $AO \cong DO = 4$ m que é o raio da semi-esfera maior. Além disso, $AO = CO + AC$, logo:

$$CO = 4 - 1 \Rightarrow CO = 3\,\text{m}$$

O triângulo BCO é retângulo em C, então:

$$BO^2 = BC^2 + CO^2 \Rightarrow 4^2 = BC^2 + 3^2 \Rightarrow BC = \sqrt{7}\,\text{m}$$

Agora, vamos calcular a área total, em partes. Primeiro, a base do depósito:

$$S_1 = \pi BC^2 \Rightarrow S_1 = 7\pi\,\text{m}^2$$

A área lateral do cilindro:

$$S_2 = 2\pi \cdot CB \cdot CO \Rightarrow S_2 = 2\pi \cdot \sqrt{7} \cdot 3 \Rightarrow S_2 = 6\sqrt{7}\pi \,\mathrm{m}^2$$

Agora, a coroa circular da parte superior:

$$S_3 = \pi BC^2 - \pi AC^2 \Rightarrow S_3 = (7-1)\pi \Rightarrow S_3 = 6\pi \,\mathrm{m}^2$$

Finalmente, a semi-esfera menor:

$$S_4 = \frac{4\pi AC^2}{2} \Rightarrow S_4 = 2\pi \,\mathrm{m}^2$$

A área total será:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow S = 7\pi + 6\sqrt{7} + 6\pi + 2\pi \Rightarrow S = (15 + 6\sqrt{7})\pi \,\mathrm{m}^2$$

Opção E

Questão 8

Solução: Vamos calcular o determinante dado:

$$\det \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos(x+y) = -\frac{1}{3}$$

Façamos então $x + y = \alpha$, teremos:

$$\operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{9-1}{9}}$$

Portanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Agora, podemos trabalhar na expressão dada:

$$3\operatorname{sen}(x+y) + \tan(x+y) - \sec(x+y) = 3\operatorname{sen}\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos\alpha} =$$

Substituindo os valores já obtidos:

$$= 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 3 = 3$$

Opção D

Questão 9

Solução: Usando a propriedade para a função f dada, podemos multiplicar o intervalo por constantes $k = 3, 9, 27, 81, \ldots$ e teremos:

Intervalo		Área
$1 \leq x \leq 3$	$\longrightarrow$	A
$3 \leq x \leq 9$	$\longrightarrow$	A
$9 \leq x \leq 27$	$\longrightarrow$	A
$27 \leq x \leq 81$	$\longrightarrow$	A
$81 \leq x \leq 243$	$\longrightarrow$	A

Então, no intervalo $9 \leq x \leq 243$, a área vale $3A$ no total[1].

Opção B

Questão 10

Solução: Usando T para tênis, S para *short* e C para camisetas, sabemos do que enunciado que:

$$\begin{cases} T + 2S + 3C = 100 \\ 2T + 5S + 8C = 235 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por 3 teremos:

$$\begin{cases} 3T + 6S + 9C = 300 \\ 2T + 5S + 8C = 235 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira da segunda:

$$T + S + C = 65$$

Que é justamente o que queremos.

Opção D

Questão 11

Solução: Desenvolvendo a expressão dada:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2(\operatorname{sen} x + 1) = 3\cos x$$

[1]Caso não tenha entendido ainda, faça um gráfico e coloque os intervalos de x lado a lado. A visualização facilitará o entendimento

Como sabemos que $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ podemos escrever:

$$\operatorname{sen}^2 x + \left[\frac{2}{3}\left(\operatorname{sen} x + 1\right)\right]^2 = 1$$

Então:

$$\operatorname{sen}^2 x + \frac{4}{9}(\operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 1) = 1$$

Daí:

$$9 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x + 4 = 9 \Rightarrow 13 \operatorname{sen}^2 x + 8 \operatorname{sen} x - 5 = 0$$

Solucionando:

$$\operatorname{sen} x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-5)}}{2 \cdot 13}$$

Fazendo as contas:

$$\operatorname{sen} x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 260}}{26}$$

E temos duas soluções para $\operatorname{sen} x$:

$$\operatorname{sen} x_1 = \frac{-8 + 18}{26} \Rightarrow \operatorname{sen} x_1 = \frac{5}{13}$$

E

$$\operatorname{sen} x_2 = \frac{-8 - 18}{26} \Rightarrow \operatorname{sen} x_2 = -1$$

Calculamos agora $\cos x$:

$$\cos x_1 = \frac{2}{3}(\operatorname{sen} x_1 + 1) \Rightarrow \cos x_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{13} + 1\right) \Rightarrow \cos x_1 = \frac{12}{13}$$

E

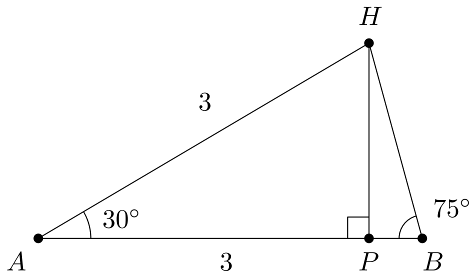
$$\cos x_2 = \frac{2}{3}(\operatorname{sen} x_2 + 1) \Rightarrow \cos x_2 = \frac{2}{3}(-1 + 1) \Rightarrow \cos x_2 = 0$$

Que não é viável, pois $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ e, portanto, $\cos x \neq 0$. Então:

$$\operatorname{sen} x + \cos x = \frac{5}{13} + \frac{12}{13} = \frac{17}{13}$$

Opção E

Questão 12



Solução: Seja H o ponto onde se encontra o balão. Assim temos o triângulo ABH, com $AB = 3$, $A\widehat{B}H = 75°$ e $B\widehat{A}H = 30°$. Então:

$$A\widehat{B}H + B\widehat{A}H + A\widehat{H}B = 180°$$

Portanto:

$$75° + 30° + A\widehat{H}B = 180° \Rightarrow A\widehat{H}B = 75°$$

Portanto, o triângulo é isósceles e $AH = AB = 3$.
Seja P a projeção de H sobre AB de modo que $HP \perp AB$. Então no triângulo AHP temos:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{HP}{AH} \Rightarrow HP = \frac{1}{2} \cdot 3 \Rightarrow HP = \frac{3}{2}\,\text{km}$$

Opção E

Questão 13

Solução: Seja $M(x_M, y_M)$ o ponto da estação do metrô, $E(x_E, y_E)$ o ponto onde está a escola e $P(x_P, y_P)$ o lugar geométrico dos pontos cuja razão entre as medidas dos segmentos $\frac{PM}{PE} = \sqrt{2}$. Sendo assim, usando a fórmula da distância entre dois pontos:

$$\frac{\sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}}{\sqrt{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2}} = \sqrt{2}$$

Daí:

$$\frac{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}{(x_P - x_E)^2 + (y_P - y_E)^2} = 2$$

Agora, sem perda de generalidade, podemos considerar um eixo coordenado de tal for que a escola e o metrô estejam sobre o eixo das abscissas, de modo que o metrô esteja no ponto $M(0, 0)$ e a escola no ponto $E(2, 0)$. Portanto:

$$\frac{(x_P - 0)^2 + (y_P - 0)^2}{(x_P - 2)^2 + (y_P - 0)^2} = 2 \Rightarrow \frac{(x_P)^2 + (y_P)^2}{(x_P - 2)^2 + (y_P)^2} = 2$$

Continuando:

$$(x_P)^2 + (y_P)^2 = 2(x_P - 2)^2 + 2(y_P)^2$$

Desenvolvendo e agrupando os termos semelhantes:

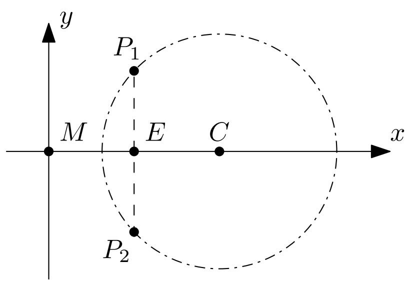
$$(x_P)^2 + (y_P)^2 = 2(x_P^2 - 4x_P + 4) + 2(y_P)^2$$

$$x_P^2 - 8x_P + 8 + y_P^2 = 0$$

Reescrevendo e completando os quadrados:

$$(x_P - 4)^2 - 16 + 8 + y_P^2 = 0 \Rightarrow (x_P - 4)^2 + y_P^2 = 8$$

Esta equação corresponde a uma circunferência com centro $C(4, 0)$ e raio $R = 2\sqrt{2}$. Então todos os pontos P estão sobre esta circunferência.



Como os pontos P_1 e P_2, onde estão as câmeras, estão sobre a circunferência temos $x_P = x_E$, bastando calcular y_P:

$$(2 - 4)^2 + y_P^2 = 8 \Rightarrow y_P^2 = 4 \Rightarrow y_P = \pm 2$$

Daí sabemos que $P_1P_2 = 4$ metros.

Opção D

Questão 14

Solução: A questão trata de uma regra de três composta. Tabelando os dados:

teares	h/dia	tecido (m)	largura (m)	dias
5	6	1800	1,20	4
4	8	2000	0,80	d

Considerando que a largura e a quantidade de metros são diretamente proporcionais ao número de dias e que o número de teares e a jornada de trabalho são inversamente proporcionais ao número de dias, temos:

$$\frac{4}{d} = \frac{1,2 \cdot 1800 \cdot 8 \cdot 4}{0,8 \cdot 2000 \cdot 6 \cdot 5}$$

Fazendo as contas:

$$\frac{1}{d} = \frac{3 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 1}{2 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 5} \Rightarrow d = \frac{50}{18} \Rightarrow d \approx 2,8\,\text{dias}$$

Opção B

Questão 15

Solução: Basta, para resolver o problema, calcular quantas palavras de uma, duas, três ou quatro letras podem ser formadas. Para uma letra só temos $T_1 = 2$ possibilidades. Para duas letras, temos $T_2 = 2 \times 2 = 4$ possibilidades. Para três letras temos $T_3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilidades. E, por fim, para quatro letras teremos $T_4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ possibilidades. No total:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \Rightarrow T = 2 + 4 + 8 + 16 \Rightarrow T = 30$$

Opção E

Questão 16

Solução: Usando a relação $\ell = \theta r$ entre o comprimento do arco ℓ, o ângulo central θ em radianos e o raio r do setor, teremos:

$$\ell = \frac{2\pi}{3} \cdot 12 \Rightarrow \ell = 8\pi\,\text{cm}$$

Este comprimento ℓ é o comprimento C da circunferência da base do cone, logo sendo R o raio da base do cone podemos escrever:

$$C = 2\pi R \Rightarrow 8\pi = 2\pi R \Rightarrow R = 4\,\text{cm}$$

Mas a geratriz g do cone formado corresponde ao raio r do setor usado e temos a seguinte relação entre o raio R do cone, sua geratriz g e sua altura h:

$$g^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow 12^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$$

Opção D

Questão 17

Solução: Primeiro vamos encontrar $\vec{v}_2$. De acordo com o enunciado teremos:

$$\vec{v}_2 = a_{21}\vec{i} + a_{22}\vec{j} + a_{23}\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_2 = -\vec{i} + \vec{j} + 0\vec{k}$$

Ou seja, $\vec{v}_2 = (-1, 1, 0)$. Então:

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} \Rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{2}$$

Como $\vec{u} \parallel \vec{v}_2$ temos que $u = k \cdot v_2$ com $k > 0$, já que têm o mesmo sentido. Então:

$$3 = k \cdot \sqrt{2} \Rightarrow k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

E o vetor $\vec{u}$ será:

$$\vec{u} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

Agora faremos o processo análogo para $\vec{v_3}$:

$$\vec{v}_3 = a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + a_{33}\vec{k} \Rightarrow \vec{v}_2 = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j} + \vec{k}$$

Portanto, $\vec{v}_3 = (1, \sqrt{2}, 1)$. Daí, como $\vec{v} \parallel \vec{v}_3$, temos $v = p \cdot v_3$, com $p > 0$. Calculemos então v_3:

$$v_3 = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} \Rightarrow v_3 = 2$$

Portanto:

$$2 = p \cdot 2 \Rightarrow p = 1$$

E, então[2]:

$$\vec{v} = (1, \sqrt{2}, 1)$$

E, finalmente, fazendo $u \times v$:

$$u \times v = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando as contas:

$$u \times v = \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\vec{j} - \left(3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\vec{k}$$

Colocando $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ em evidência:

$$u \times v = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left[\vec{i} + \vec{j} - \left(\sqrt{2} + 1\right)\right]\vec{k}$$

[2]Há um erro no enunciado. Onde se lê $|\vec{u}| = 2$, leia-se $|\vec{v}| = 2$. No entanto, para preservar a solução, ignoramos este erro. Provavelmente a questão foi anulada.

Opção A

Questão 18

Solução: Usando a função dada teremos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-3)^2 \cdot e^x = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

E também:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-3)^2 \cdot e^x$$

Repare que $\lim_{x\to-\infty} e^x = \frac{1}{e^{+\infty}}$ e que $\lim_{x\to-\infty}(x-3)^2 = +\infty^2$. Logo podemos aplicar o teorema de L'Hopital:

$$\lim_{x\to-\infty} (x-3)^2 \cdot e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(-x-3)^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot(-1)}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Ou seja, a assíntota horizontal é a reta $y = 0$. Como a função nunca cruzará assíntota nem em $+\infty$ nem em $-\infty$, ela deverá cruzar em algum ponto da forma $(a, 0)$. Da função:

$$0 = (x-3)^2 \cdot e^x \Rightarrow x = 3$$

Então o ponto procurado é $(a, b) = (3, 0)$. Sendo assim:

$$a^2 + b \cdot e^{\operatorname{sen}^2 a} - 4a = 3^2 + 0 \cdot e^{\operatorname{sen}^2 3} - 4 \cdot 3 = -3$$

Opção A

Questão 19

Solução: Partindo da expressão dada, podemos escrever:

$$\int \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int 2 \operatorname{sen} x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 2x \, dx = \frac{1}{4}\int 2 \operatorname{sen} 2x \, dx$$

Logo:

$$= \frac{1}{4} \cdot (-\cos 2x) + c = -\frac{\cos 2x}{4} + c$$

Opção B

Questão 20

Solução: Chamemos de g o preço da gasolina antes do aumento. Então como a gasolina sofreu um aumento de $7,7\%$ seu preço novo equivale a $107,7\% = \frac{107,7}{100}$:

$$2,799 = 1,077g \Rightarrow g = 2,5988$$

Analogamente, o preço do álcool sofreu um aumento de $15,8\%$, portanto o novo valor equivale a $115,8\% = \frac{115,8}{100}$. Se a é o valor antes do aumento, temos:

$$2,199 = 1,158a \Rightarrow a = 1,8989$$

Sendo assim, antes do aumento teríamos um gasto T_0:

$$T_0 = 10g + 5a \Rightarrow T_0 = 25,998 + 9,4948 \Rightarrow T_0 \approx 35,4928$$

O gasto T depois do aumento:

$$T = 10 \cdot 2,799 + 5 \cdot 2,199 \Rightarrow T = 27,99 + 10,995 \Rightarrow T \approx 38,985$$

Portanto:

$$T - T_0 \approx 3,4922 \Rightarrow T - T_0 \approx 3,50$$

Opção D