Curso Mentor

CEPERJ

Concurso Professor de Matemática – Soluções Comentadas

Barbosa, L. S.

07/08/2011

Concurso Março 2011

Questão 31

Uma loja de roupas de malha vende camisetas com malha de três qualidades. Cada camiseta de malha comum custa R$ 15,00, de malha superior custa R$ 24,00 e de malha especial custa R$ 30,00. Certo mês, a loja vendeu 180 camisetas de malha comum, 150 de malha superior e 70 de malha especial. O preço médio, em reais, da venda de uma camiseta foi de:

A) 20 B) 20,5 C) 21 D) 21,5 E) 11

Solução:

O valor que procuramos é o total gasto em reais dividido pelo total de camisetas, isto é, a média ponderada do preço pelo total de camisetas:

$$p_{médio} = \frac{180 \times 15 + 150 \times 24 + 70 \times 30}{180 + 150 + 70}$$

$$p_{médio} = \frac{30\left(6 \times 15 + 5 \times 24 + 70 \times 1\right)}{10\left(18 + 15 + 7\right)}$$

$$p_{médio} = \frac{3 \cdot \left(90 + 120 + 70\right)}{40}$$

$$p_{médio} = \frac{3 \cdot 280}{40} \Rightarrow p_{médio} = 21$$

Opção C

Questão 32

Considere a igualdade $\dfrac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = a + \sqrt{b}$. O valor de $a + b$ é:

A) 10 B) 15 C) 21 D) 27 E) 34

Solução:

Seja a expressão dada:

$$\frac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = a + \sqrt{b}$$

Vamos racionalizar o lado esquerdo da equação:

$$\frac{5-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = a + \sqrt{b}$$

$$\frac{10+5\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=a+\sqrt{b}$$

$$\frac{10+3\sqrt{3}-3}{4-3}=a+\sqrt{b}$$

$$\frac{7+3\sqrt{3}}{1}=a+\sqrt{b}\Rightarrow 7+3\sqrt{3}=a+\sqrt{b}$$

Reescrevendo a expressão:

$$7+3\sqrt{3}=a+\sqrt{b}\Rightarrow 7+\sqrt{27}=a+\sqrt{b}$$

Daí:

$$a=7 \text{ e } b=27$$

Então:

$$a+b=7+27=34$$

Opção E

Questão 33

Se $f\left(x\right)=\dfrac{2}{x-1}$, a raiz da equação $fof\left(x\right)=10$ é:

A) 1/3 B) 4/3 C) 5/3 D) 7/3 E) 8/3

Solução:

Primeiro calculamos a função composta $fof\left(x\right)$:

$$f\left(x\right)=\frac{2}{x-1}\Rightarrow fof\left(x\right)=\frac{2}{\dfrac{2}{x-1}-1}$$

$$fof\left(x\right)=\frac{2}{\dfrac{2}{x-1}-1}\Rightarrow fof\left(x\right)=\frac{2}{\dfrac{2-x+1}{x-1}}\Rightarrow fof\left(x\right)=\frac{2\left(x-1\right)}{3-x}$$

$$fof\left(x\right)=\frac{2\left(x-1\right)}{3-x}\Rightarrow \frac{2\left(x-1\right)}{3-x}=10$$

Então:

$$2x-2=30-10x$$
$$12x=32$$
$$x=\frac{32}{12}\Rightarrow x=\frac{8}{3}$$

Opção E

Questão 34

Uma caixa d'água tem 440 litros de água ao meio-dia de uma segunda-feira. Por causa de uma torneira malfechada, ela vaza constantemente e, às 18 horas desse dia, só tinha 392 litros. O momento em que a caixa terá 160 litros será:

A) 19h de terça-feira
B) 21h de terça-feira
C) 23h de terça-feira
D) 01h de quarta-feira
E) 03h de quarta-feira

Solução:

O problema em questão trata de uma proporção direta entre o número de horas decorrido desde o início (variação de tempo) e a quantidade vazada de água (variação de volume). Observe que isto só é possível porque a vazão é constante:

$$\begin{array}{ccc} \text{Horas} & & \text{Litros} \\ 18-12=6\ h & — & 440-392=48\ litros \\ \Delta t & — & 440-160=280\ litros \end{array}$$

Teremos então a equação:

$$\frac{6}{\Delta t}=\frac{48}{280}$$

$$\frac{1}{\Delta t}=\frac{8}{280}\Rightarrow \Delta t=35\ horas$$

Então, passar-se-á 1 dia mais 11 horas. Ou seja, às 23 horas de terça-feira.

Opção C

Questão 35

Para cada número real t, o ponto $P\left(x,y\right)$, definido pelas equações $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=3t-4 \end{cases}$, pertence à reta r. O ponto $P\left(7,k\right)$ pertence à reta r. O valor de k é:

A) 3 B) 5 C) 6 D) 7 E) 9

Solução:

Vamos encontrar a equação cartesiana da reta r:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 4 \end{cases} \Rightarrow 2t = x - 1 \Rightarrow t = \frac{x-1}{2}$$

Substituindo na segunda equação:

$$y = 3 \cdot \frac{x-1}{2} - 4$$

$$y = \frac{3x-3}{2} - 4 \Rightarrow y = \frac{3x-3-8}{2}$$

$$y = \frac{3x-11}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{11}{2}$$

Substituindo o ponto P:

$$k = \frac{3}{2} \cdot 7 - \frac{11}{2}$$

$$k = \frac{21-11}{2} \Rightarrow k = \frac{10}{2} \Rightarrow k = 5$$

Opção B

Questão 36

Uma permutação de um número natural é um outro número natural que possui exatamente os mesmos algarismos em outra ordem. Se todas as permutações do número 31452 foram escritas em ordem crescente, o número que ocupará a 80ª posição nessa lista será:

A) 32154 B) 34251 C) 35142 D) 41352 E) 42153

Solução:

Como permutamos 5 algarismos teremos cinco grupos começando por números distintos que são as cinco possibilidades do primeiro número. No total são:

$$T = 5! \Rightarrow T = 120$$

Dividindo por 5:

$$\frac{T}{5} = \frac{120}{5} \Rightarrow \frac{T}{5} = 24$$

São então cinco grupos de 24 maneiras de começar o número. Depois de 3 grupos ordenados em ordem crescente teremos 72 números que são os começados por 1, 2 e 3. Obviamente os próximos números em ordem são:

41235 → 73ª posição
41253 → 74ª posição
41325 → 75ª posição
41352 → 76ª posição

41523 → 77ª posição
41532 → 78ª posição
42135 → 79ª posição
42153 → 80ª posição

Opção E

Questão 37

São dados os pontos $F(2,0)$ e $F'(-2,0)$. O ponto $P(x,y)$ é tal que a soma de suas distâncias aos pontos *F* e *F'* é igual a 6. A equação da curva descrita pelo ponto *P* é:

A) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$

B) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{9}=1$

C) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=1$

D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

E) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{5}=1$

Solução:
Queremos que a soma das distâncias de *F* e *F'* ao ponto *P* seja constante e igual a 6, ou seja:

$$d_{PF}+d_{PF'}=6$$

$$\sqrt{\left(x_P-x_F\right)^2+\left(y_P-y_F\right)^2}+\sqrt{\left(x_P-x_{F'}\right)^2+\left(y_P-y_{F'}\right)^2}=6$$

$$\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-0\right)^2}+\sqrt{\left(x-\left(-2\right)\right)^2+\left(y-0\right)^2}=6$$

$$\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}=6$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

$$\left(\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}\right)^2=6^2$$

Desenvolvendo:

$$\left(\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}\right)^2+2\sqrt{\left(x-2\right)^2+y^2}\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}+$$
$$+\left(\sqrt{\left(x+2\right)^2+y^2}\right)^2=36$$

$$\left(x-2\right)^2+y^2+2\sqrt{\left(\left(x-2\right)^2+y^2\right)\left(\left(x+2\right)^2+y^2\right)}+\left(x+2\right)^2+y^2=36 \ (*)$$

(*) Lembrando que $\left(\sqrt{a^2}\right)^2=\left|a\right|$, mas como tratamos de grandezas positivas, temos $a=\left|a\right|$.

$$2x^2+8+2y^2+2\sqrt{\left(x^2-4x+4+y^2\right)\left(x^2+4x+4+y^2\right)}=36$$
$$2\sqrt{\left(x^2-4x+4+y^2\right)\left(x^2+4x+4+y^2\right)}=36-2x^2-8-2y^2$$
$$\sqrt{\left(x^2-4x+4+y^2\right)\left(x^2+4x+4+y^2\right)}=\frac{36-2x^2-8-2y^2}{2}$$

Desenvolvendo a expressão na raiz e elevando novamente ambos os lados ao quadrado:

$$x^4+4x^3+4x^2+x^2y^2-4x^3-16x^2-16x-4xy^2+4x^2+16x+$$
$$+16+4y^2+y^2x^2+4xy^2+4y^2+y^4=\left(14-x^2-y^2\right)^2$$

$$x^4-8x^2+2x^2y^2+16+8y^2+y^4=\left(14-x^2-y^2\right)^2$$
$$x^4-8x^2+2x^2y^2+16+8y^2+y^4=196+x^4+y^4+2\left(-14x^2+x^2y^2-14y^2\right)$$
$$-8x^2+2x^2y^2+16+8y^2=196-28x^2+2x^2y^2-28y^2$$
$$-8x^2+16+8y^2=196-28x^2-28y^2$$
$$\left(28-8\right)x^2+\left(28+8\right)y^2=196-16$$
$$20x^2+36y^2=180$$

Dividindo ambos os lados por 180:

$$\frac{20x^2}{180}+\frac{36y^2}{180}=\frac{180}{180}$$
$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

Opção A

Questão 38

Em uma loja, uma bolsa que custa R$ 70,00 à vista pode ser adquirida com um pagamento de R$ 30,00 no ato da compra mais um cheque de R$ 46,00 para ser descontado 30 dias após a compra. A taxa de juros ao mês que a loja está cobrando é de:

A) 6% B) 8% C) 12% D) 15% E) 18%

Solução:

São pagos R$ 30,00 no ato da compra (isentos de juros) os R$ 40,00 que faltam transformam-se em R$ 46,00. Então:

$$40 + \frac{x}{100} \times 40 = 46$$

$$\frac{x}{5} \times 2 = 46 - 40$$

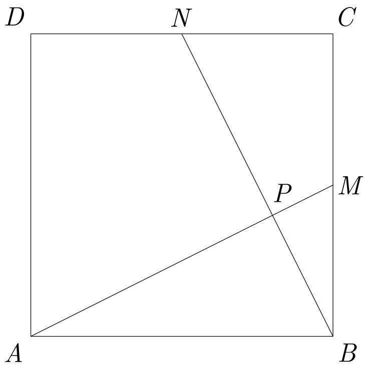
$$\frac{x}{5} \times 2 = 6 \Rightarrow x = \frac{30}{2} \Rightarrow x = 15$$

O aumento foi, portanto, de 15%.

Opção D

Questão 39

Na figura abaixo, $ABCD$ é um quadrado, os pontos M e N são médios dos lados BC e CD, respectivamente, e P é o ponto de interseção dos segmentos AM e BN.

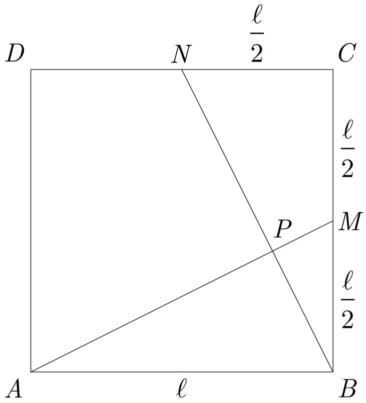


A razão $\frac{\overline{PA}}{\overline{PM}}$ é igual a:

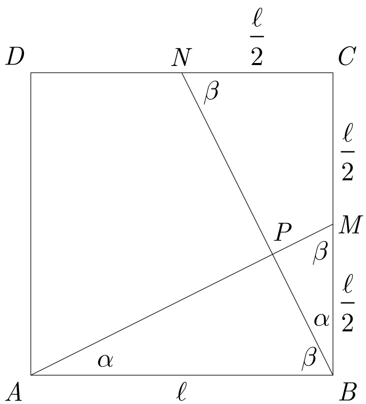
A) 5 B) $2\sqrt{5}$ C) 4 D) 3 E) $\sqrt{5}$

Solução:

Seja ℓ o lado do quadrado dado. Podemos então identificar os segmentos na figura:



É fácil notar que os triângulos ABM e BCN são congruentes, pois $AB \cong BC = \ell$ e $MB \cong NC = \dfrac{\ell}{2}$ e os ângulos em B e C são retos. Seja $M\hat{A}B \cong N\hat{B}C = \alpha$ e $A\hat{M}B \cong B\hat{N}C = \beta$. Então o ângulo em P também é reto veja:



Então AMB e MPB são triângulos semelhantes. Podemos então fazer:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{PB}} \Rightarrow \frac{\frac{\ell}{2}}{\overline{PM}} = \frac{\ell}{\overline{PB}} \Rightarrow \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} = 2 \Rightarrow \overline{PB} = 2\overline{PM}$$

E também:

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{\overline{PB}}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{PA}}} \Rightarrow \frac{\frac{\ell}{2}}{\overline{\overline{PB}}} = \frac{\ell}{\overline{\overline{PA}}} \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{\overline{PB}}} = 2$$

Considerando as duas equações anteriores:

$$\frac{\overline{PA}}{2 \cdot \overline{\overline{PM}}} = 2 \Rightarrow \frac{\overline{PA}}{\overline{\overline{PM}}} = 4$$

Opção C

Questão 40

Considere a função de variável real $f\left(x\right) = \dfrac{3x+8}{2}$. O valor de $f^{-1}\left(10\right)$ é:

A) $\dfrac{1}{19}$ B) 6 C) 0,25 D) 4 E) 19

Solução:
Como queremos o valor da ordenada da função inversa em que a abscissa vale 10, só precisamos substituir este valor na própria ordenada da função original:

$$10 = \frac{3x+8}{2}$$
$$20 = 3x + 8$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

Opção D

Questão 41

Na expansão decimal do número $\dfrac{3}{7}$, o $100^{\underline{o}}$ algarismo após a vírgula é:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

Solução:
Se dividirmos 3 por 7 encontramos:

$$\frac{3}{7} = 0,428571428571428571428571...$$

Ou seja, a cada 6 algarismos depois da vírgula, temos o algarismo 4. Então basta tomarmos o resto da divisão de 100 por 6:

$$\frac{100}{6} = 16 + \frac{4}{6}$$

Temos então resto 4. O que quer dizer que há 16 repetições e buscamos o 4º algarismo que é o 5.

Opção D

Observação: Isto sempre ocorre em frações próprias de denominador igual a 7. Para maiores referências veja o livro *O Homem que Calculava* de *Malba Tahan.*

Questão 42

O valor máximo da função $f\left(x\right) = a\left(x-1\right)\left(x-9\right)$ é igual a 80. O valor do coeficiente a é:

A) -5 B) -4 C) -8 D) -2 E) -6

Solução:

As raízes da função são 1 e 9. Pois:

$$a\left(x-1\right)\left(x-9\right) = 0$$

$$a\left(x-1\right)\left(x-9\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ ou \\ x = 9 \end{cases}$$

A abscissa do vértice está na média aritmética das raízes, ou seja:

$$x_v = \frac{1+9}{2} \Rightarrow x_v = 5$$

Basta substituir na função e encontramos a ordenada do vértice:

$$f\left(x_v\right) = a\left(x_v - 1\right)\left(x_v - 9\right) = 80$$

$$a\left(5-1\right)\left(5-9\right) = 80$$

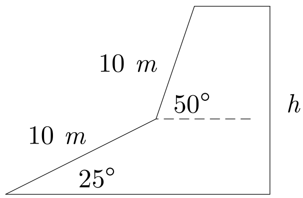
$$a = \frac{80}{4 \times \left(-4\right)}$$

$$a = -5$$

Opção A

Questão 43

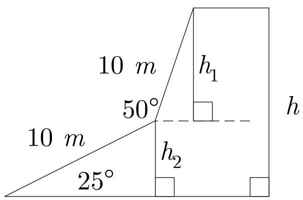
A figura abaixo mostra o perfil de um muro construído para conter uma encosta pouco estável. A primeira parte da rampa tem 10 m de comprimento e inclinação de 25° com a horizontal, e a segunda parte tem 10 m de comprimento e inclinação de 50° com a horizontal. Considerando $\operatorname{sen} 25° = 0,42$ e $\cos 25° = 0,91$, o valor da altura total do muro (h) é, aproximadamente:



A) 11,1 m B) 11,8 m C) 12,5 m D) 13,2 m E) 13,9 m

Solução:

Vamos traçar duas paralelas em relação à h como na figura abaixo:



De acordo com esta figura temos:

$$h = h_1 + h_2$$

Calculando os senos dos ângulos dados:

$$\begin{cases} \text{sen } 50° = \dfrac{h_1}{10} \\ \text{sen } 25° = \dfrac{h_2}{10} \end{cases}$$

Então:

$$h = 10 \times \text{sen } 50° + 10 \times \text{sen } 25°$$

$$h = 10 \times \left(\text{sen } 50° + \text{sen } 25° \right)$$

Como sabemos:

$$\text{sen}\left(2x\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(x\right)\cos\left(x\right)$$

Então:

$$\text{sen}\left(50°\right) = 2 \cdot \text{sen}\left(25°\right)\cos\left(25°\right)$$

$$\text{sen}\left(50°\right) = 2 \cdot 0,42 \cdot 0,91$$

$$\text{sen}\left(50°\right) = 0,7644$$

Portanto:

$$h = 10 \times \left(0,7644 + 0,42\right) \Rightarrow h = 11,84 \ m$$

Questão 44

Em uma progressão geométrica, o segundo termo é 27^{-2}, o terceiro termo é 9^4, e o quarto termo é 3^n. O valor de n é:

A) 22 B) 20 C) 18 D) 16 E) 24

Solução:
Primeiro podemos encontrar a razão desta progressão:

$$a_3 = a_2 q \Rightarrow q = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow q = \frac{9^4}{27^{-2}}$$

Então, aplicando propriedades de potências:

$$q = \frac{9^4}{27^{-2}} \Rightarrow q = \frac{\left(3^2\right)^4}{\left(3^3\right)^{-2}} \Rightarrow q = 3^{2\times4-3\times(-2)}$$

$$q = 3^{2\times4-3\times(-2)} \Rightarrow q = 3^{8+6} \Rightarrow q = 3^{14}$$

O quarto termo, portanto:

$$a_4 = a_3 q \Rightarrow 3^n = 3^8 \cdot 3^{14} \Rightarrow 3^n = 3^{8+14} \Rightarrow n = 22$$

Opção A

Questão 45

Os sócios do "Clube-Sete" consideram o 7 como o número da sorte. Para eles, tudo o que se refere ao número 7 é bom e, naturalmente, para os sócios desse clube, um ano é sortudo quando é múltiplo de 7. A quantidade de anos sortudos desde a descoberta do Brasil até hoje foi:

A) 72 B) 73 C) 74 D) 75 E) 76

Solução:
A descoberta do Brasil se deu no ano de 1500. Assim, fazendo a divisão de 1500 por 7 encontramos quociente igual a 214 e resto igual a dois, pois $1500 = 214 \times 7 + 2$. Então o próximo múltiplo de 7 é 1505; basta somar 7 a 1498.
O mesmo procedimento pode ser feito para descobrir o último múltiplo de 7. Dividindo 2011 por 7 teremos quociente 287 e resto igual a 2. Portanto o último mútiplo de 7 foi o número 2009.
Agora fazemos:

$$\frac{2009-1505}{7}+1=72+1=73$$

Precisamos somar uma unidade porque a divisão do intervalo por 7 desconsidera o primeiro múltiplo de 7 (basta verificar, por exemplo, que entre 0 e 10 há três múltiplos de 5).

Opção B

Questão 46

Os pontos $A=\left(1{,}2\right)$, $B=\left(5{,}7\right)$ e $C=\left(11,y\right)$ são colineares. O valor de y é:

A) 12,5 B) 13 C) 13,5 D) 14 E) 14,5

Solução:
Se estes pontos são colineares significa que os segmentos formados por eles têm a mesma inclinação em relação ao eixo das abscissas:

$$\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{y_B-y_C}{x_B-x_C}$$

$$\frac{2-7}{1-5}=\frac{7-y}{5-11}$$

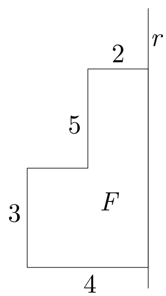
$$\frac{-5}{-4}=\frac{7-y}{-6}\Rightarrow 28-4y=-30$$

$$28+30=4y\Rightarrow y=\frac{58}{4}\Rightarrow y=14,5$$

Opção E

Questão 47

A figura abaixo mostra o polígono F, com todos os seus ângulos retos e as medidas de alguns lados dados em centímetros.

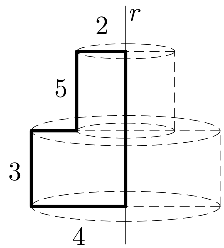


O polígono F gira em torno da reta r, que contém o seu maior lado produzindo um sólido de revolução. A área total desse sólido é:

A) 60π B) 64π C) 72π D) 76π E) 80π

Solução:

A rotação de F em torno de r gera dois cilindros: um de raio 4 e outro de raio 2:



A área total será dada por:

$$S_T = 2 \cdot \underbrace{\pi \cdot 4^2}_{\substack{\text{Área do círculo} \\ \text{da base}}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 4 \cdot 3}_{\text{Área lateral de baixo}} + \underbrace{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 5}_{\text{Área lateral de cima}}$$

Podemos reparar que o círculo da base aparece novamente em cima dividido em uma coroa circular de espessura 2 e um círculo menor de raio 2.

Daí:

$$S_T = 32\pi + 24\pi + 20\pi$$

$$S_T = 76\pi$$

Opção D

Questão 48

O professor dá aos seus 20 alunos da turma de recuperação uma questão de múltipla escolha com 4 opções de resposta. Desses 20 alunos, 8 sabem resolvê-la e, portanto, vão assinalar a resposta correta. Os outros não sabem resolver e vão assinalar, ao acaso, uma opção. Se um aluno dessa turma for escolhido ao acaso, a probabilidade de que ele tenha acertado essa questão é:

A) 50% B) 55% C) 60% D) 64% E) 72%

Solução:

Só há duas formas de um aluno qualquer acertar uma questão: ou ele sabe e marca a correta ou ele "chuta" e acerta. Portanto a probabilidade será calculada como:

$$P = P_1 + P_2$$

Só 8 sabem de fato resolver a questão, a chance de um deles ser escolhido ao acaso é:

$$P_1 = \frac{8}{20} \Rightarrow P_1 = \frac{2}{5}$$

Os 12 demais só acertarão se chutarem e acertarem. A chance de escolher uma dentre as quatro opções corretas é $\frac{1}{4}$. Então a probabilidade de chutar e acertar e ser escolhido entre 12 pessoas é:

$$P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{12}{20} \Rightarrow P_2 = \frac{1}{1} \times \frac{3}{20} \Rightarrow P_2 = \frac{3}{20}$$

Somando:

$$P = \frac{2}{5} + \frac{3}{20} \Rightarrow P = \frac{2 \cdot 4 + 3}{20} \Rightarrow P = \frac{11}{20} = \frac{55}{100} = 55\%$$

Opção B

Questão 49

João tem uma fazenda de gado, e a quantidade de animais cresce regularmente 20% a cada ano. Certo dia, João diz: "se todas as condições continuarem as mesmas, daqui a n anos minha boiada será 10 vezes maior que a de hoje". O menor valor inteiro de n que torna essa afirmação verdadeira é:
Obs: dado $\log 12 = 1{,}08$

A) 11 B) 13 C) 15 D) 20 E) 50

Solução:

Seja P_0 a população inicial. Podemos organizar uma tabela para ver o que ocorre com a boiada:

Inicial		Depois de 1 ano
P_0	—	$1{,}2P_0$
$1{,}2P_0$	—	$(1{,}2)^2 P_0$
$\vdots$		$\vdots$
$(1{,}2)^{n-1} P_0$	—	$(1{,}2)^n P_0$

Queremos que daqui a n anos a população seja 10 vezes a população inicial, portanto:

$$10P_0 = (1{,}2)^n P_0$$

Cancelando a população inicial e aplicando logaritmo de ambos os dados da equação:

$$\log 10 = \log\left(1{,}2\right)^n$$
$$1 = n\log 1{,}2$$
$$1 = n\log\frac{12}{10}$$
$$1 = n\left(\log 12 - \log 10\right)$$
$$1 = n\left(1{,}08 - 1\right)$$
$$1 = n\left(0{,}08\right) \Rightarrow n = \frac{1}{0{,}08} \Rightarrow n = 12{,}5 \text{ anos}$$

Em 13 anos certamente a afirmação será verdadeira.

Opção B

Questão 50

Uma das raízes complexas da equação $x^3 - 3x^2 + 8x - 6 = 0$ é:

A) $1 + i\sqrt{2}$ B) $1 + i\sqrt{3}$ C) $2 + i\sqrt{3}$ D) $1 + i\sqrt{5}$ E) $2 + i\sqrt{6}$

Solução:
Por observação, vemos que o polinômio tem 1 como raiz:

$$x^3 - 3x^2 + 8x - 6 = 0$$
$$1^3 - 3\cdot 1^2 + 8\cdot 1 - 6 = 0$$

A partir daí, bastaria usar o algoritmo de divisão. Queremos apresentar uma solução que começa um pouco diferente:
Fatorando o polinômio:

$$x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x + 6x - 6 = 0$$
$$x^2\left(x - 1\right) - 2x\left(x - 1\right) + 6\left(x - 1\right) = 0$$
$$\left(x^2 - 2x + 6\right)\left(x - 1\right) = 0$$

Calcuando então a outra raiz:

$$x^2 - 2x + 6 = 0$$
$$\Delta = \left(-2\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = -20$$

$$x_{1,2}=\frac{-\left(-2\right)\pm\sqrt{-20}}{2\cdot 1}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+2\sqrt{5}i}{2}\Rightarrow x_1=1+\sqrt{5}i\\ x_2=\dfrac{2-2\sqrt{5}i}{2}\Rightarrow x_2=1-\sqrt{5}i\end{cases}$$

Opção D

Questão 51

O sistema:

$$\begin{cases}x+3y-z=7\\ 2x-5y+4z=9\\ 5x+4y+x=m\end{cases}$$

é indeterminado. O valor de m é:

A) 16 B) 18 C) 24 D) 30 E) 36

Solução:

Vamos primeiro escrever a matriz completa dos coeficientes e dos termos independentes:

$$\begin{cases}x+3y-z=7\\ 2x-5y+4z=9\\ 5x+4y+x=m\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&7\\2&-5&4&9\\6&4&0&m\end{array}\right]$$

Multiplicando a primeira linha por 4 e somando à segunda linha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&7\\2&-5&4&9\\6&4&0&m\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&7\\1\cdot 4+2&3\cdot 4-5&\left(-1\right)\cdot 4+4&7\cdot 4+9\\6&4&0&m\end{array}\right]$$

Portanto:

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&7\\6&7&0&37\\6&4&0&m\end{array}\right]$$

Multiplicando a segunda por $\left(-1\right)$ e somando com a tereceira:

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&7\\6&7&0&37\\-6+6&-7+4&-0+0&-37+m\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&-1&7\\6&7&0&37\\0&-3&0&-37+m\end{array}\right]$$

Observação: As equações são linearmente independentes, então o sistema é possível e determinado. Outra forma de verificar é calcular o determinante da matriz dos coeficientes, no nosso caso este determinante é **diferente de zero**. Mesmo sabendo disso vamos continuar o raciocínio para confirmar esta afirmação.

Voltando a forma de equações:

$$\begin{cases} x + 3y - z = 7 \\ \quad 6x + 7y = 37 \\ \qquad -3y = -37 + m \end{cases}$$

Da terceira equação teremos:

$$y = \frac{37 - m}{3}$$

Substituindo na segunda equação:

$$6x + 7y = 37 \Rightarrow 6x + 7\left(\frac{37 - m}{3}\right) = 37$$

Desenvolvendo:

$$3 \cdot 6x + 259 - 7m = 3 \cdot 37$$
$$18x - 7m = 111 - 259$$
$$x = \frac{7m - 148}{18}$$

Na primeira equação:

$$\frac{7m - 148}{18} + 3 \cdot \left(\frac{37 - m}{3}\right) - z = 7$$
$$\frac{7m - 148}{18} + 37 - m - z = 7$$
$$\frac{7m - 148}{18} - m - z = -30$$
$$7m - 148 - 18m - 18z = -540$$
$$-11m - 18z = -392$$
$$z = \frac{392 - 11m}{18}$$

Ou seja, as soluções são da forma:

$$\left(\frac{7m - 148}{18}, \frac{37 - m}{3}, \frac{392 - 11m}{18}\right)$$

E não há restrições para os valores de m, desta forma o sistema nunca será indeterminado ou impossível. Por exemplo, para m igual a zero temos:

$$\left(\frac{-74}{9},\frac{37}{3},\frac{196}{9}\right)$$

Sem Opção

Questão 52

São dadas as matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. A matriz X é tal que $AX=B$. A soma dos elementos da matriz X é:

A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Solução:

Queremos encontrar a matriz X tal que:

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Seja a matriz X:

$$X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

Daí:

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2a-c & 2b-d\\ a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Daí temos:

$$a=1 \text{ e } b=2$$

Podemos calcular c e d:

$$2a-c=3$$
$$2\cdot 1-c=3\Rightarrow c=-1$$

E

$$2b-d=1$$
$$2\cdot 2-d=1\Rightarrow d=3$$

O que queremos é:

$$a+b+c+d=1+2-1+3$$
$$a+b+c+d=5$$

Opção B

Questão 53

No sistema cartesiano, a equação $y^2 = \left(x+1\right)^2 - \left(x-1\right)^2$ representa uma:

A) reta
B) circunferência
C) elipse
D) hipérbole
E) parábola

Solução:
Desenvolvendo a expressão:

$$y^2 = \left(x+1\right)^2 - \left(x-1\right)^2$$

$$y^2 = x^2 + 2x + 1 - \left(x^2 - 2x + 1\right)$$

$$y^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1$$

$$y^2 = 4x$$

$$x = \frac{y^2}{4}$$

A equação representa uma parábola.

Opção E

Questão 54

Sobre os números reais a e b sabe-se que $a + b = 6$ e que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}$. O valor de $a^2 + b^2$ é:

A) 18 B) 22 C) 28 D) 36 E) 48

Solução:
Sabemos que:

$$\left(a+b\right)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Então:

$$a^2 + b^2 = \left(a+b\right)^2 - 2ab$$

Usando a expressão dada:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{6}{ab}=\frac{3}{2}\Rightarrow ab=4$$

Então:

$$a^2+b^2=\left(6\right)^2-2\cdot 4$$

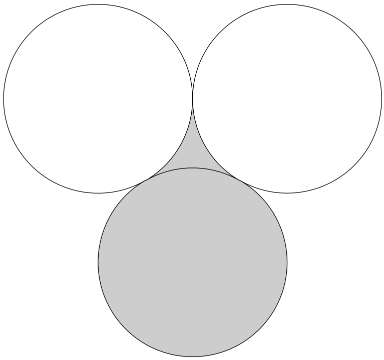
$$a^2+b^2=36-8$$

$$a^2+b^2=28$$

Opção C

Questão 55

A figura abaixo mostra três círculos, cada um com 10 cm de raio, tangentes entre si.

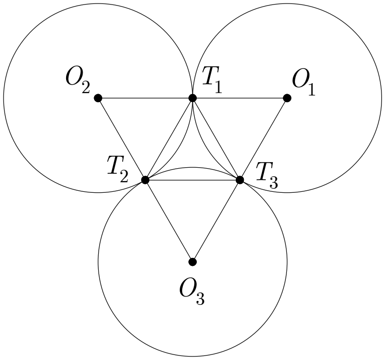


Considerando $\sqrt{3}=1,73$ e $\pi=3{,}14$, o valor da área sombreada, em cm^2, é:

A) 320 B) 330 C) 340 D) 350 E) 360

Solução:

Primeiro vamos ligar os centros das circunferências e os respectivos pontos de tangência:



Os centros são O_1, O_2 e O_3 e T_1, T_2 e T_3 os pontos de tangência entre os círculos.

O triângulo formado pelos centros é equilátero de lado 20 cm e os triângulos formados pelos centros e pelos pontos de tangência também são equiláteros de lado igual a 10 cm. A área de cada folha é dada por:

$$S_{folha} = \frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{(10)^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{folha} = \frac{100}{6}\pi - \frac{100\sqrt{3}}{4}$$

Como há três folhas no triângulo central (que é congruente aos demais):

$$S' = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} - 3 \times S_{folha}$$

$$S' = \frac{100\sqrt{3}}{4} - 3 \times \left(\frac{100}{6}\pi - \frac{100\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$S' = 25\sqrt{3} - 50\pi + 75\sqrt{3}$$

$$S' = 100\sqrt{3} - 50\pi$$

Esta é a área central. Basta somar a área do círculo:

$$S = S' + \pi r^2$$

$$S = 100\sqrt{3} - 50\pi + 100\pi$$

$$S = 100\sqrt{3} + 50\pi$$

$$S = 100 \cdot 1{,}73 + 50 \cdot 3{,}14$$

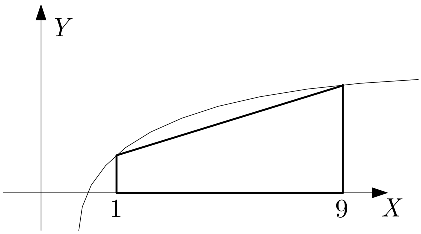
$$S = 173 + 157$$

$$S = 330$$

Opção B

Questão 56

A figura abaixo mostra um trapézio retângulo que tem dois vértices sobre o eixo X e dois vértices sobre o gráfico da função $Y = \log\left(10x^2\right)$.



Obs: dado $\log 3 = 0,477$.

A área desse trapézio é, aproximadamente:

A) 10,2 B) 12,5 C) 15,6 D) 17,7 E) 19,8

Solução:

A área de um trapézio é dada por:

$$S = \frac{\left(b + B\right)h}{2}$$

Para encontrar as bases basta usarmos os valores da abscissa na função:

Base menor:

$$b = \log\left(10 \cdot 1^2\right) \Rightarrow b = \log 10 \Rightarrow b = 1$$

Base maior:

$$B = \log\left(10 \cdot 9^2\right) \Rightarrow B = \log 10 + \log 81$$

$$B = 1 + \log 3^4 \Rightarrow B = 1 + 4\log 3 \Rightarrow B = 1 + 4 \cdot 0,477$$
$$B = 2,908$$

Calculando então a área:

$$S = \frac{\left(1 + 2,908\right) \times 8}{2}$$

$$S = \frac{3,908 \times 8}{2} \Rightarrow S = 15,632$$

Opção C

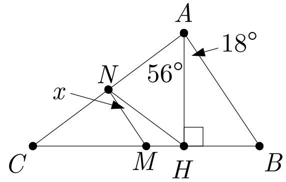
Questão 57

No triângulo ABC, o ponto H do lado BC é tal que AH é uma altura, e os pontos M e N são médios dos lados BC e AC, respectivamente. Conhecendo os ângulos $B\hat{A}H = 18°$ e $H\hat{A}C = 56°$, o ângulo $H\hat{N}M$ mede:

A) 38° B) 44° C) 42° D) 36° E) 46°

Solução:

Vamos fazer a figura do enunciado:



Como $NM \parallel AB$ temos que os ângulos $C\hat{N}M$ e $C\hat{A}B$ são congruentes e também $C\hat{M}N \cong C\hat{B}A$ (*).

(*) Para mostrar estas congruências basta ver que N e M são pontos médios e C é ângulo comum aos triângulos CMN e CBA. Isto torna estes triângulos semelhantes.

A partir disso temos:

$$C\hat{A}B \cong C\hat{N}M = 56° + 18° = 74°$$

O triângulo AHB é retângulo, então:

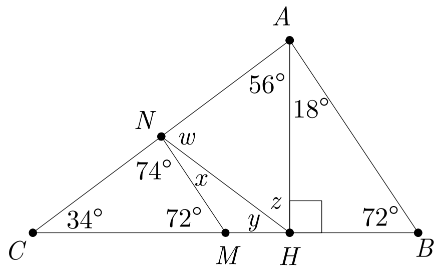
$$A\hat{B}H \cong C\hat{H}N = 90 - 18 = 72°$$

O ângulo $N\hat{M}H$ é externo do triângulo CMN:

$$N\hat{M}H = 180° - 72° = 108°$$

Como o triângulo ACH é retângulo temos que $\hat{C} = 34°$.

Vamos refazer a figura com os valores achados até agora:



Como o triângulo ACH é retângulo e NH é mediana temos que o triângulo ANH é isósceles. Portanto:

$$z = 56°$$

E

$$w + 56^\circ + 56^\circ = 180 \Rightarrow w = 68^\circ$$

Então:

$$74^\circ + x + 68^\circ = 180$$
$$x = 180^\circ - 142^\circ$$
$$x = 38^\circ$$

Opção A

Questão 58

Sabendo-se que $2a + 3b + 4c = 17$ e que $4a + b - 2c = 9$, o valor de $a + b + c$ é:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Solução:

Façamos:

$$a + b + c = x$$

Das equações dadas podemos montar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2a + 3b + 4c = 17 \\ 4a + b - 2c = 9 \\ a + b + c = x \end{cases}$$

Colocando em uma matriz completa:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 17 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right]$$

Multiplicando a terceira linha por (-2) e somando com a primeira:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 4 & 17 \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2-2 & 3-2 & 4-2 & 17-2x \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 17-2x \\ 4 & 1 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right]$$

Multiplicando a terceira linha por (-4) e somando com a primeira:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 17-2x \\ 4-4 & 1-4 & -2-4 & 9-4x \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right]$$

Multiplicando a primeira linha por 3 e somando com a segunda:

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 17-2x \\ 0 & -3+3 & -6+6 & 9-4x+3\left(17-2x\right) \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 17-2x \\ 0 & 0 & 0 & 9-4x+3\left(17-2x\right) \\ 1 & 1 & 1 & x \end{array}\right]$$

Voltando à forma de equações:

$$\begin{cases} b+2c=17-2x \\ 0=9-4x+3\left(17-2x\right) \\ a+b+c=x \end{cases}$$

Da segunda equação:

$$0=9-4x+3\left(17-2x\right)$$
$$0=9-4x+51-6x$$
$$10x=60\Rightarrow x=6$$

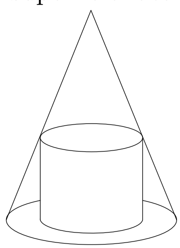
Ou seja:

$$a+b+c=6$$

Opção D

Questão 59

A figura abaixo mostra um cilindro reto inscrito em um cone:
a base inferior do cilindro está sobre a base do cone, e a circunferência da base superior do cilindro está sobre a superfície lateral do cone.

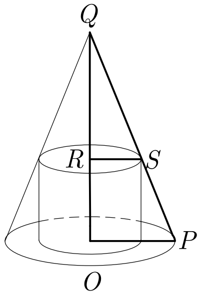


Sabe-se que a altura do cilindro é a metade da altura do cone e que o volume do cilindro é de 150cm³. O volume do cone é:

A) 400 cm³ B) 360 cm³ C) 300 cm³ D) 240 cm³ E) 200 cm³

Solução:

Vamos traçar a altura do cone e os raios do cilindro e do cone:



Os triângulos QRS e QPO são semelhantes, pois o ângulo em Q é comum e RS é paralelo OP. Então podemos escrever:

$$\frac{QR}{QO} = \frac{RS}{OP}$$

Seja h a altura do cilindro e H a altura do cone. Chamaremos de r o raio do cilindro e R o raio do cone:

$$\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$$

Mas $H = 2h$ então:

$$\frac{h}{2h} = \frac{r}{R}$$
$$R = 2r$$

Calculando os volumes:

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h$$

De acordo com as equações anteriores, podemos reecrever o volume do cone:

$$V_{\text{Cone}} = \frac{1}{3}\pi\left(2r\right)^2 2h$$

$$V_{\text{Cone}} = \frac{8}{3}\pi r^2 h$$

Como o volume do cilindro vale 150 cm^3:

$$V_{\text{Cone}} = \frac{8}{3}\times 150 \Rightarrow V_{\text{Cone}} = 400 \text{ cm}^3$$

Opção A

Questão 60

As letras B, R, A, S, I, L devem ser escritas nas faces de um cubo, com uma letra em cada face. O número de maneiras diferentes em que essas letras podem ser colocadas nas faces do cubo é:

A) 18 B) 24 C) 30 D) 60 E) 72

Solução:
Vamos planificar este cubo e colocar as letras nas faces em um dos exemplos de preenchimento:

	I		
B	R	A	S
	L		

Repare que para escolher as 6 letras temos 6! maneiras, pois teremos 6 letras como escolha para a primeira face, 5 para a segunda e assim por diante. Mas cada vez que pintamos uma face temos quatro maneiras de visualizar esta pintura. Tomando o cubo planificado anterior poderíamos vê-lo nas quatro direções a seguir: $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\uparrow$, e $\downarrow$. Que não seriam pinturas diferentes, apenas "rotações" da original. Como isto se repete para cada uma das 6 faces teremos $6 \times 4 = 24$ visualizações repetidas para o total de 6! possibilidades. Portanto, o número de maneiras distintas de pintar o cubo é:

$$T = \frac{6!}{6 \times 4} \Rightarrow T = 30$$

Opção C

Observação: É possível chegar ao mesmo resultado por exaustão, ou seja escrevendo as maneiras de pintar o cubo. A única recomendação é observar calmamente para não contar repetidamente as rotações.