Soluções Comentadas
Matemática
Curso Mentor
Colégio Naval

Barbosa, L.S.
leonardosantos.inf@gmail.com

30 de dezembro de 2013

Sumário

Parte I

Provas

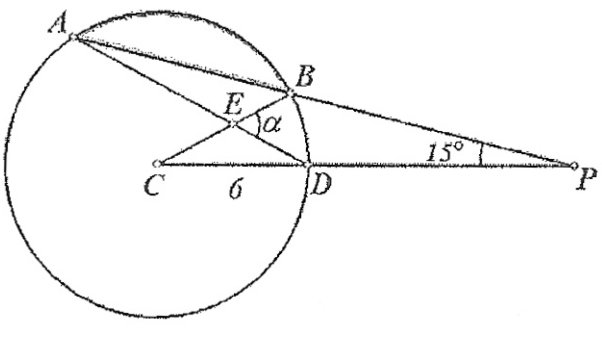
Capítulo 1

Matemática 2013/2014

1) Sejam $P = (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{11})$ e $Q = (1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{11})$. Qual é o valor de $\sqrt{\frac{P}{Q}}$?

(A) $\sqrt{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{5}$ (D) 3 (E) 5

2) Analise a figura a seguir.



Na figura acima, a circunferência de raio 6 tem centro em C. De P traça-se os segmentos PC, que corta a circunferência em D, e PA, que corta a circunferência em B. Traça-se ainda os segmentos AD e CB, com interseção em E. Sabendo que o ângulo APC é $15°$ e que a distância do ponto C ao segmento de reta AB é $3\sqrt{2}$, qual é o valor do ângulo α?

(A) $75°$ (B) $60°$ (C) $45°$ (D) $30°$ (E) $15°$

3) Qual é o valor da expressão $[(3^{0,333\ldots})^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - (\sqrt[3]{3})^{3^3}]^{\sqrt[7]{92}}$?

(A) $0,3$ (B) $\sqrt[3]{3}$ (C) 1 (D) 0 (E) -1

4) Dada a equação $(2x+1)^2(x+3)(x-2)+6=0$, qual é a soma das duas maiores raízes reais desta equação?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

5) Seja a, b, x, y números naturais não nulos. Se $a \cdot b = 5$, $k = \frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}}$ e $x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k}$, qual é o algarismo das unidades do número $(y^x - x^y)$?
(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 8

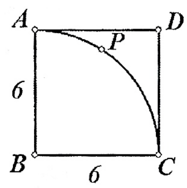
6) Sabe-se que o ortocentro H de um triângulo ABC é interior ao triângulo e seja Q o pé da altura relativa ao lado AC. Prolongando BQ até o ponto P sobre a circunferência circunscrita ao triângulo, sabendo-se que $BQ = 12$ e $HQ = 4$, qual é o valor QP?
(A) 8 (B) 6 (C) $5,5$ (D) $4,5$ (E) 4

7) Sabendo que $2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y$ é o menor múltiplo de 17 que pode-se obter para x e y inteiros não negativos, determine o número de divisores positivos da soma de todos os algarismos desse número, e assinale a opção correta.
(A) 12 (B) 10 (C) 8 (D) 6 (E) 4

8) Seja ABC um triângulo acutângulo e "L" a circunferência circunscrita ao triângulo. De um ponto Q (diferente de A e de C) sobre o menor arco AC de "L" são traçadas perpendiculares às retas suportes dos lados do triângulo. Considere M, N e P os pés das perpendiculares sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Tomando $MN = 12$ e $PN = 16$, qual é a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP?
(A) $\frac{3}{4}$ (B) $\frac{9}{16}$ (C) $\frac{8}{9}$ (D) $\frac{25}{36}$ (E) $\frac{36}{49}$

9) Considere um conjunto de 6 meninos com idades diferentes e um outro conjunto com 6 meninas também com idades diferentes. Sabe-se que, em ambos os conjuntos, as idades variam de 1 ano até 6 anos. Quantos casais podem-se formar com a soma das idades inferior a 8 anos?
(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 22

10) Analise a figura a seguir.



A figura acima exibe o quadrado $ABCD$ e o arco de circunferência APC com centro em B e raio $AB = 6$. Sabendo que o arco AP da figura tem comprimento $\frac{3\pi}{5}$ é correto afirmar que o ângulo PCD mede:
(A) 36° (B) 30° (C) 28° (D) 24° (E) 20°

11) Considere que $ABCD$ é um trapézio, onde os vértices são colocados em sentido horário, com bases $AB = 10$ e $CD = 22$. Marcam-se na base AB o ponto P e na base CD o ponto Q, tais que $AP = 4$ e $CQ = x$. Sabe-se que as áreas dos quadriláteros $APQD$ e $PBCQ$ são iguais. Sendo assim, pode-se afirmar que a medida x é:
(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16

12) Assinale a opção que apresenta o conjunto solução da equação $\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0$ no conjunto dos números reais.
(A) $\{-\sqrt{13}, \sqrt{13}\}$ (B) $\{\sqrt{13}\}$ (C) $\{-\sqrt{13}\}$ (D) $\{0\}$ (E) $\emptyset$

13) O maior inteiro "n", tal que $\frac{n^2+37}{n+5}$ tambem é inteiro, tem como soma dos seus algarismos um valor igual a
(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14

14) Sabe-se que a média aritmética da soma dos algarismos de todos os números naturais desde 10 até 99, inclusive, é k. Sendo assim, pode-se afirmar que o número é $\frac{1}{k}$ é
(A) natural.
(B) decimal exato.
(C) dízima periódica simples.
(D) dízima periódica composta.
(E) decimal infinito sem período.

15) Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.
I – Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.
II – Seja $AB = c$, $AC = b$ e $BC = a$. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.
III – Se M é ponto médio de BC e $AM = \frac{BC}{2}$, ABC é retângulo.
IV – Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.
Assinale a opção correta.
(A) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
(B) Apenas a afirmativa I é verdadeira.
(C) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

(D) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.
(E) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

16) Seja $A \cup B = \{3, 5, 8, 9, 10, 12\}$ e $B \cap C_X^A = \{10, 12\}$ onde A e B são subconjuntos de X, e C_X^A é o complementar de A em relação a X. Sendo assim, pode-se afirmar que o número máximo de elementos de B é
(A) 7 (B) 6 (C) 5 (D) 4 (E) 3

17) Uma das raízes da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$, com a, b, c pertencentes ao conjunto dos números reais, sendo $a \neq 0$, é igual a 1. Se $b - c = 5a$ então, b^c em função de a é igual a
(A) $-3a^2$ (B) 2^a (C) $2a3^a$ (D) $\frac{1}{(2a)^3 a}$ (E) $\frac{1}{2^{(3a)} a^{(3+a)}}$

18) Sabendo que ABC é um triângulo retângulo de hipotenusa $BC = a$, qual é o valor máximo da área de ABC?
(A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ (B) $\frac{a^2}{4}$ (C) $\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$ (D) $\frac{3a^2}{4}$ (E) $\frac{3a^2}{4}$

19) Considere, no conjunto dos números reais, a desigualdade $\frac{2x^2-28x+98}{x-10} \geq 0$. A soma dos valores inteiros do conjunto solução desta desigualdade, que são menores do que $\frac{81}{4}$ é
(A) 172 (B) 170 (C) 169 (D) 165 (E) 157

20) Dado que a e b são números reais nao nulos, com $b \neq 4a$, e que

$$\begin{cases} 1 + \frac{2}{ab} = 5 \\ \\ \frac{5-2b^2}{4a-b} = 4a + b \end{cases}$$

, qual é o valor de $16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4$?
(A) 4 (B) $\frac{1}{18}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) 18 (E) $\frac{1}{4}$

Parte II

Soluções

Capítulo 2

Matemática 2013/2014

Questão 1

Solução: Desenvolvendo P temos:

$$P = \left(\frac{3+1}{3}\right) \cdot \left(\frac{5+1}{5}\right) \cdot \left(\frac{7+1}{7}\right) \cdot \left(\frac{9+1}{9}\right) \cdot \left(\frac{11+1}{11}\right)$$

Daí:

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11}$$

Agora desenvolvendo Q:

$$Q = \left(\frac{5-1}{5}\right) \cdot \left(\frac{7-1}{7}\right) \cdot \left(\frac{9-1}{9}\right) \cdot \left(\frac{11-1}{11}\right)$$

Então:

$$Q = \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11}$$

Sendo assim, para $\sqrt{\frac{P}{Q}}$ temos:

$$\sqrt{\frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{11}}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{12}{11}}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{11}}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = 2$$

Opção B

Questão 2

Solução: Primeiro traçamos CA e CM com CM perpendicular a AB. Já que C é centro da circunferência temos $CA \cong CB = 6$. Daí segue que CM é altura do triângulo isósceles ABC e, portanto, mediana (e mediatriz) de AB. Aplicamos então, o teorema de pitágoras no triângulo BCM, e lembrando que $CM = 3\sqrt{2}$ pelo enunciado:

$$BC^2 = CM^2 + BM^2 \Rightarrow 6^2 = (3\sqrt{2})^2 + BM^2$$

Logo:

$$BM = \sqrt{36 - 18} \Rightarrow BM = 3\sqrt{2}$$

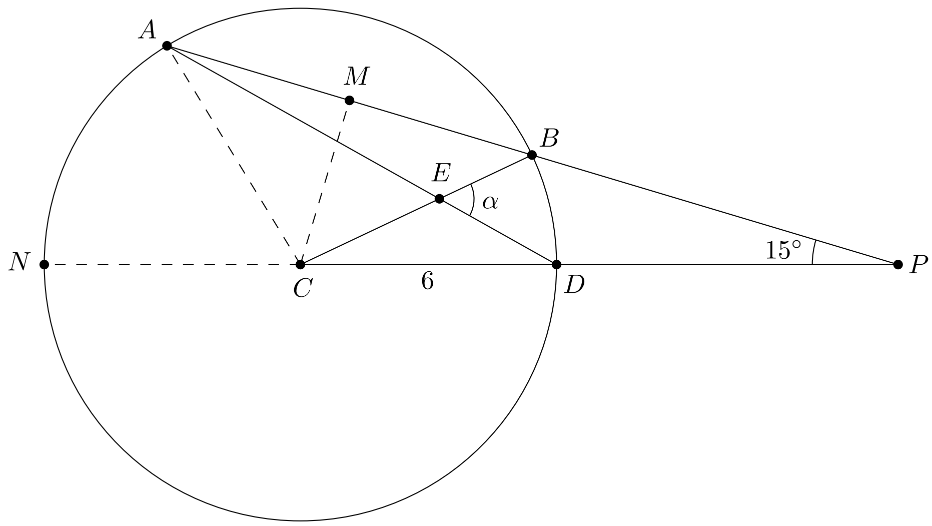
O que nos leva a concluir que BCM é isósceles, que $BM \cong CM$ e $A\hat{C}B = 90°$. Além disso, $A\hat{B}C \cong B\hat{A}C = 45°$ e $A\hat{B}C$ é ângulo externo do triângulo BCP, logo:

$$15° + B\hat{C}P = 45° \Rightarrow B\hat{C}P = 30°$$

Deste resultado vem que o arco $BD = 30°$, pois $B\hat{C}P$ é ângulo central. Prolongamos CP até encontrar a circunferência em um ponto N e temos a seguinte relação entre os arcos AN, BD e o ângulo em P:

$$A\hat{P}N = \frac{AN - BD}{2} \Rightarrow 15° = \frac{AN - 30°}{2} \Rightarrow AN = 60°$$

Isto nos leva a concluir que $A\hat{D}N = 30°$, pois é ângulo inscrito e que CDE também é isósceles. Como α é ângulo externo de CDE, teremos $\alpha = 60°$.



Opção B

Questão 3

Solução: Em primeiro lugar devemos lembrar que $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$. Daí vem que:

$$[(3^{\frac{1}{3}})^{27} + 2^{2^{1^7}} - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{\frac{448}{7}}} - (\sqrt[3]{3})^{3^3}]^{\sqrt[7]{92}} =$$

$$= [(3^{\frac{27}{3}} + 2^2 - \sqrt[5]{239 + \sqrt[3]{64}} - (\sqrt[3]{3})^{27}]^{\sqrt[7]{92}} =$$
$$= [(3^9 + 4 - \sqrt[5]{239 + 4} - 3^9]^{\sqrt[7]{92}} =$$
$$= [4 - \sqrt[5]{243}]^{\sqrt[7]{92}} = [4 - 3]^{\sqrt[7]{92}} = 1^{\sqrt[7]{92}} = 1$$

Opção C

Questão 4

Solução: Primeiramente vamos desenvolver a expressão completamente:

$$(2x + 1)^2(x + 3)(x - 2) + 6 = 0$$

Daí, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$(4x^2 + 4x + 1)(x^2 + x - 6) + 6 = 0$$

Mais uma vez:

$$4x^4 + 4x^3 - 24x^2 + 4x^3 + 4x^2 - 24x + x^2 + x - 6 + 6 = 0$$

Então:

$$4x^4 + 8x^3 - 19x^2 - 23x = 0$$

Ou seja:

$$x(4x^3 + 8x^2 - 19x - 23) = 0$$

Uma das raízes é, portanto, $x = 0$. Ficamos então com:

$$4x^3 + 8x^2 - 19x - 23 = 0$$

Por observação vemos que -1 é solução, daí podemos dividir o polinômio por $x - (-1)$ e obteremos:

$$(x + 1)(4x^2 + 4x - 23) = 0$$

Precisamos então apenas fazer:

$$4x^2 + 4x - 23 = 0$$

Teremos então:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4 \cdot (-23)}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{384}}{8}$$

Fatorando 384 teremos então as outras soluções:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8\sqrt{6}}{8} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

Daí temos $x_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{6}$ e $x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{6}$. São, portanto as quatro soluções da equação:

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} - \sqrt{6}, -1, 0, -\frac{1}{2} + \sqrt{6} \right\}$$

As duas maiores raízes são, portanto, 0 e $-\frac{1}{2} + \sqrt{6}$. Não há opção correta.

Sem Opção

Questão 5

Solução: Primeiro, vamos desenvolver a expressão de k:

$$k = \frac{2^{(a+b)^2}}{2^{(a-b)^2}} \Rightarrow k = 2^{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)} \Rightarrow k = 2^{4ab}$$

Sabemos que $x^2 - y^2 = \sqrt[5]{k}$ e que $ab = 5$, daí:

$$x^2 - y^2 = \sqrt[5]{2^{4 \cdot 5}} \Rightarrow (x-y)(x+y) = 16$$

Como x e y são naturais e não-nulos, temos $x > y$ e consequentemente $x + y > x - y$. Além disso, as seguintes possibilidades:

1. $x - y = 1$ e $x + y = 16$;
   Solucionando este sistema, encontramos $2x = 17$, logo não serve;

2. $x - y = 2$ e $x + y = 8$;
   Solucionando este sistema, encontramos $x = 5; y = 3$, que é a resposta;

3. $x - y = 4$ e $x + y = 4$;
   Solucionando este sistema, encontramos $x = 4; y = 0$, logo não serve;

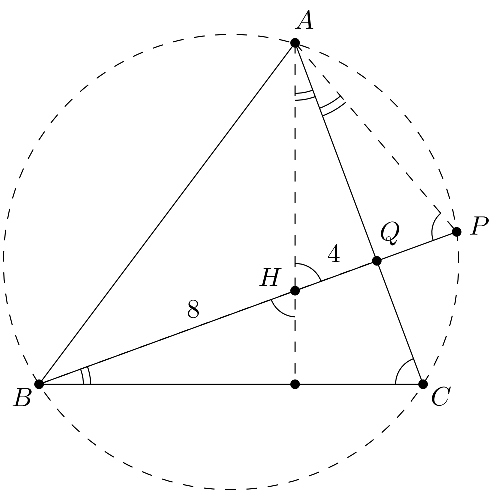
Portanto, para a expressão pedida teremos:

$$(y^x - x^y) = 3^5 - 5^3 = 243 - 125 = 118$$

Opção E

Questão 6

Solução: Em primeiro lugar traçamos o segmento AP. Note que os ângulos $C\hat{A}P$ e $P\hat{B}C$ são congruentes, pois ambos estão inscritos no mesmo arco na mesma circunferência. Além disso, veja que os triângulos AQP e AHQ são congruentes. Para mostrar isso, verificamos que os triângulos QBC e AQP são semelhantes, pois $A\hat{Q}P \cong B\hat{Q}C$; que são opostos pelo vértice, já vimos que $C\hat{A}P \cong P\hat{B}C$; inscritos no mesmo arco. Logo, temos $A\hat{P}Q \cong Q\hat{C}B$ (ou ainda porque estão inscritos no mesmo arco). Mas os triângulos AQH e QBC também são semelhantes, pois $H\hat{A}Q \cong Q\hat{B}C$, basta ver que seu lados são respectivamente paralelos.



Assim podemos concluir que os triângulos AQH e APQ são congruentes, pois são semelhantes e tem o lado AQ comum. Desta maneira temos $AP \cong AH$, $HQ \cong QP = 4$. Isto mostra que o simétrico do ortocentro em relação ao lado AC está sobre o círculo circunscrito. é possível mostrar isso para os demais lados.

Opção E

Questão 7

Solução: Como queremos que seja múltiplo de 17 devemos fazer:

$$2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot (34)^y = 2^x \cdot 3^{4y+x} \cdot 2^y \cdot 17^y =$$

Agrupando as potências de mesma base:

$$= 2^{x+y} \cdot 3^{4y+x} \cdot 17^{y} =$$

Como é o menor múltiplo de 17 para x e y inteiros e não negativos, temos $y = 1$ para garantir o fator de 17. Daí:

$$= 2^{x+1} \cdot 3^{4+x} \cdot 17 =$$

Além disso, como todos os expoentes são positivos, devemos ter $x = 0$ para garantir o menor múltiplo, logo:

$$= 2^{1} \cdot 3^{4} \cdot 17 = 2754$$

Calculando a soma S dos algarismos:

$$S = 2 + 7 + 5 + 4 = 18$$

Cujos divisores são: $D(18) = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. Poderíamos ter feito também: $18 = 2 \cdot 3^2$, logo $n(D(18)) = (1 + 1)(2 + 1) = 6$ divisores.

Opção D

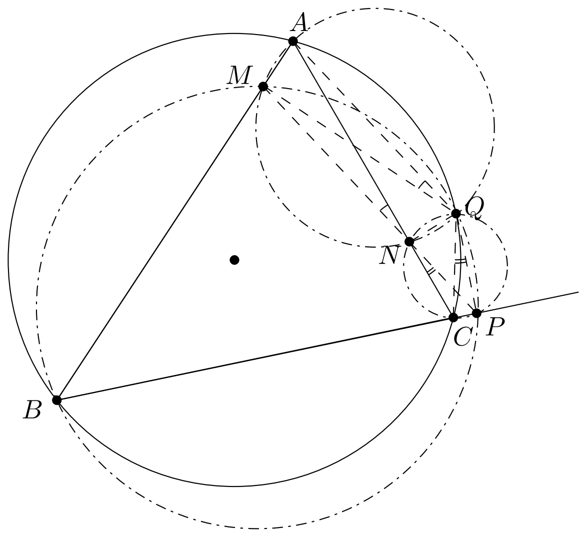
Questão 8

Solução: Quando temos um ponto sobre o círculo circunscrito a um triângulo, e a partir dele traçamos perpendiculares a cada um dos lados do triângulo, temos três pontos colineares que são os pés das perpendiculares. A reta é chamada de reta de Simson-Wallace. Vamos então à demonstração deste fato.
Primeiro é preciso lembrar que, se um quadrilátero tem dois ângulos opostos de 90° ele é circunscritível. Basta ver que é possível formar dois triângulos retângulos de mesma hipotenusa e que ambas são o diâmetro do círculo. Visto isso, procedemos com a demonstração. Primeiro vemos que $AMNQ$ é cincunscritível, pois $A\hat{M}Q \cong A\hat{N}Q = 90°$. O mesmo ocorre para $CPQN$, porém, neste caso, QC é diâmetro do círculo. Basta verificar que $C\hat{P}Q \cong C\hat{N}Q = 90°$. O quadilátero $AQCB$ também é inscritível, pelo enunciado e, vendo que $Q\hat{A}B \cong Q\hat{P}B = 90°$. Daí podemos escrever a seguinte relação usando ângulos:

$$A\hat{Q}M + M\hat{Q}C + A\hat{B}C = 180°$$

Isto ocorre porque os ângulos são inscritos e se suplementam. O mesmo vale para o quadrilátero $BPQM$ em que $B\hat{M}Q \cong Q\hat{P}B = 90°$. Daí:

$$P\hat{Q}C + C\hat{Q}M + A\hat{B}C = 180°$$



Comparando as duas equações vemos que:

$$P\hat{Q}C = A\hat{Q}M$$

Mas veja na figura que:

$$A\hat{Q}M \cong A\hat{N}M$$

Pois são ângulos inscritos no mesmo círculo. O mesmo vale para:

$$P\hat{Q}C \cong P\hat{N}C$$

Que também estão inscritos no mesmo círculo. Daí, usando estas duas congruências, provamos que:

$$A\hat{N}M \cong P\hat{N}C$$

O que mostra que estes ângulos são opostos pelo vértice. Mas o problema não acaba aí. Queremos a razão entre as áreas dos triângulos BMN e BNP. Porém com a demonstração anterior, vemos que BMP é um triângulo (pois M, N e P estão alinhados) e BN é uma ceviana. Logo ambos têm mesma altura e a razão entre suas áreas é igual a razão entre MN e NP, ou seja:

$$\frac{S_{BMN}}{S_{BNP}} = \frac{MN}{NP} \Rightarrow \frac{S_{BMN}}{S_{BNP}} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Opção A

Questão 9

Solução: Basta fazer uma tabela colocando as idades e no cruzamento da linha com a coluna as somas:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Basta apenas contar as somas menores que 8, que são 21.

Opção D

Questão 10

Solução: Primeiro vamos calcular o comprimento do arco AC, que é um quarto de círculo:

$$AC = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 6 \Rightarrow AC = 3\pi$$

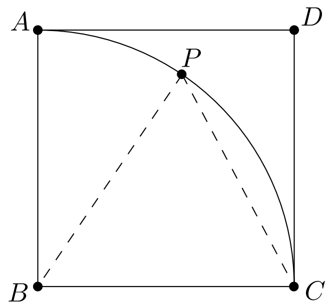
Daí podemos calcular o arco PC:

$$PC = AC - AP \Rightarrow PC = 3\pi - \frac{3\pi}{5} \Rightarrow PC = \frac{12\pi}{5}$$

Uma vez conhecido o comprimento, podemos calcular a medida do ângulo central $P\hat{B}C = \theta$, por meio da relação:

$$\ell = \theta r \Rightarrow \frac{12\pi}{5} = \theta \cdot 6 \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{5}$$

Veja que $P\hat{C}D$ é ângulo de segmento, daí:



$$P\hat{C}D = \frac{P\hat{B}C}{2} \Rightarrow P\hat{C}D = \frac{\pi}{5}$$

Esta medida está em radianos, em graus teríamos $P\hat{C}D = 36°$.
Outra solução seria perceber que o comprimento dado é um quinto do total do arco. Daí o ângulo $A\hat{B}P$ vale um quinto de $90°$ (ângulo central em B), ou seja, $18°$. Assim teremos $P\hat{B}C = 72°$ e, consequentemente, $P\hat{C}D = 36°$.

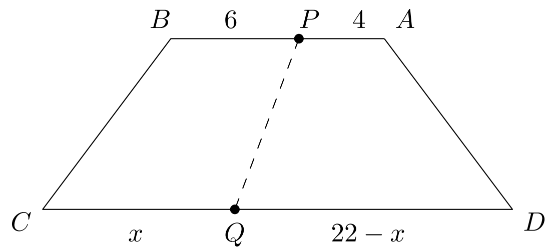
Opção A

Questão 11

Solução: O segmento PQ divide o trapézio em dois trapézios de áreas iguais:

$$S_{APQD} = S_{PBCQ} \Rightarrow \frac{(4+22-x)h}{2} = \frac{(6+x)h}{2}$$

Em que h é a altura de $ABCD$. Portanto:



$$26 - x = 6 + x \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

Opção A

Questão 12

Solução: Desenvolvendo a equação dada teremos:

$$\frac{(-3)}{\sqrt{x^2-4}} - 1 = 0 \Rightarrow -3 = \sqrt{x^2-4}$$

Ora, como $\sqrt{x^2-4} > 0$ o conjunto solução é vazio.

Opção E

Questão 13

Solução 1: Podemos reescrever a divisão da seguinte maneira:

$$\frac{n^2+37}{n+5} = \frac{n^2+10n-10n+25-25+37}{n+5} =$$

Então:

$$= \frac{(n+5)^2-10n-25+37}{n+5} = \frac{(n+5)^2-10n+50-50-25+37}{n+5} =$$

Portanto:

$$= \frac{(n+5)^2 - 10(n+5) + 62}{n+5} = n + 5 - 10 + \frac{62}{n+5}$$

O que nos dá:

$$n + 5 = 62 \Rightarrow n = 57$$

A soma dos salgarismos é 12.

Solução 2: Podemos reescrever a divisão da seguinte maneira:

$$\frac{n^2+37}{n+5} = \frac{n^2 - 25 + 25 + 37}{n+5} =$$

Então:

$$= \frac{(n+5)(n-5) + 62}{n+5} = n - 5 + \frac{62}{n+5}$$

Portanto:

$$n + 5 = 62 \Rightarrow n = 57$$

O que nos dá para a soma dos algarismos $5 + 7 = 12$.

Opção D

Questão 14

Solução: Em primeiro lugar é preciso encontrar a soma dos algarismos dos naturais de 10 até 99. Para a soma U, dos algarismos das unidades, temos a soma $0 + 1 + \ldots + 9$ aparecendo nove vezes, daí:

$$U = 9 \cdot (0 + 1 + \ldots + 9) = 9 \cdot 45$$

Para a soma D, dos algarismos das dezenas temos $10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + \ldots + 10 \cdot 9$, ou seja:

$$D = 10 \cdot (1 + 2 + \ldots + 9) = 10 \cdot 45$$

Somando $D + U$:

$$D + U = (9 + 10) \cdot 45 = 19 \cdot 45$$

Para calcular a média k precisamos do número total N de algarismos usados. De 10 a 99 há 90 números de 2 algarismos, logo são utilizados 180 algarismos. Assim:

$$k = \frac{D+U}{N} \Rightarrow k = \frac{19 \cdot 45}{180} \Rightarrow k = \frac{19}{4}$$

Portanto:

$$\frac{1}{k} = \frac{4}{19} = 0,\overline{210526315789473684}$$

Que é uma dízima periódica simples.

Opção C

Questão 15

Solução: Vamos analisar as alternativas:

1. Verdadeiro, este é o Teorema de Pitágoras;

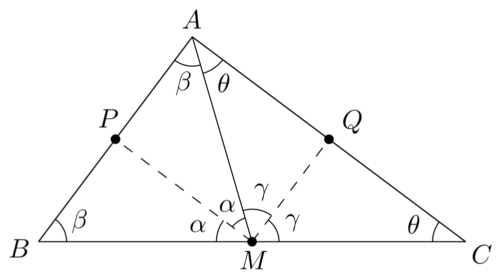
2. Verdadeiro, basta aplicar a lei dos cossenos e teremos $2bc\cos\alpha = 0$ e, portanto, $\alpha = 90°$.

3. Verdadeiro, basta traçar duas perpendiculares a partir de M em relação aos lados AB e AC, criando os pontos P e Q. Serão formados dois triângulos isósceles ($AM \cong BM \cong CM$) e, observando os ângulos, fica claro que $APMQ$ é um retângulo:

$$2\alpha + 2\gamma = 180° \Rightarrow \alpha + \gamma = 90°$$

Daí:

$$\hat{P} + \beta + \theta + \hat{Q} + \alpha + \gamma = 360° \Rightarrow \beta + \theta = 90°$$



4. Falsa, basta traçar uma reta paralela a hipotenusa, passando pelo centro do círculo. É claro que o diâmetro é menor que a hipotenusa, daí:

$$2r < a \Rightarrow r < \frac{a}{2} < \frac{3a}{4}$$

Opção D

Questão 16

Solução: Como temos a informação de que os elementos de $\{10, 12\}$ pertencem a interseção entre B e C_A^X, sabemos que $\{10, 12\} \subset B$. Mas olhando para a união entre A e B vemos que ela possui 6 elementos. Daí concluímos que há duas situações "extremas" possíveis:

$$A = \{3, 5, 8, 9\} \quad B = \{10, 12\} \quad X = \{3, 5, 8, 9, 10, 12\}$$

Repare que isto é válido:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Daí:

$$6 = 4 + 2 - 0$$

Ou:

$$A = \{3, 5, 8, 9\} \quad B = \{3, 5, 8, 9, 10, 12\} \quad X = \{3, 5, 8, 9, 10, 12\}$$

Que também é válido:

$$6 = 4 + 6 - 4$$

Opção B

Questão 17

Solução: Se 1 é raiz da equação, temos:

$$a + b + c = 0$$

Mas, do enunciado, temos:

$$b - c = 5a$$

Somando as duas equações, obteremos:

$$2b + a = 5a \Rightarrow b = 2a$$

Voltando à primeira equação:

$$a + 2a + c = 0 \Rightarrow c = -3a$$

Calculando b^c:

$$b^c = (2a)^{-3a} \Rightarrow b^c = \frac{1}{(2a)^{3a}}$$

Opção D

Questão 18

Solução: A hipotenusa é constante e de valor igual a a. Neste caso, o vértice que contém o ângulo reto está sobre uma semicircunferência de raio $\frac{a}{2}$. Como a área do triângulo será dada por:

$$S = \frac{ah}{2}$$

Em que h é a altura relativa à hipotenusa, teremos uma altura máxima igual ao raio, ou seja, $r = \frac{a}{2}$. Logo:

$$S = \frac{a \cdot \frac{a}{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{a^2}{4}$$

Opção B

Questão 19

Solução: A raiz do denominador é $x = 10$. Para o numerador temos:

$$2x^2 - 28x + 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = 0 \Rightarrow (x-7)^2 = 0$$

Ou seja, a raiz vale $x = 7$. Assim podemos reescrever a expressão do enunciado como:

$$\frac{2(x-7)^2}{x-10} \geq 0$$

O numerador é sempre positivo ou nulo para $x = 7$. Basta então que o denominador seja maior do que zero:

$$x - 10 > 0 \Rightarrow x > 10$$

Sabemos que $\frac{81}{4} = 20,25$, daí queremos a soma dos valores $n \in \mathbb{Z}$ que atendem a condição $n = 7$ ou $10 < n < 20,25$, que são:

$$N = \{7, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Cuja soma vale 162.

Sem Opção

Questão 20

Solução 1: Vamos resolver o sistema. Da primeira equação:

$$1 + \frac{2}{ab} = 5 \Rightarrow ab = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2a}$$

Da segunda equação:

$$5 - 2b^2 = (4a + b)(4a - b) \Rightarrow 5 - 2b^2 = 16a^2 - b^2$$

Logo:

$$16a^2 + b^2 = 5$$

Subustituindo a primeira na segunda:

$$16a^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 = 5 \Rightarrow 64a^4 - 20a^2 + 1 = 0$$

Solucionando:

$$a^2_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 4 \cdot 64 \cdot 1}}{2 \cdot 64}$$

Daí:

$$a^2_{1,2} = \frac{20 \pm 12}{128}$$

Cujas soluções são:

$$a_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = a_1 = \pm\frac{1}{2}$$

Ou

$$a_2 = \pm\sqrt{\frac{1}{16}} = a_2 = \pm\frac{1}{4}$$

Encontrando b:

$$b_1 = \pm\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow b_1 = \pm 1$$

Ou

$$b_2 = \pm\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \Rightarrow b_2 = \pm 2$$

Vamos agora substituir. Primeiro, fatoramos a expressão dada para ver se há alguma facilitação:

$$16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4 = a^2b^2(16a^2 - 8ab + b^2) = a^2b^2(4a - b)^2$$

Daí:

$$a^2b^2(16a^2 - 8ab + b^2) = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot (16 \cdot \frac{1}{4} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{4}$$

Ou:

$$a^2b^2(16a^2 - 8ab + b^2) = \frac{1}{16} \cdot 4 \cdot (16 \cdot \frac{1}{16} - 8 \cdot \frac{1}{2} + 4) = \frac{1}{4}$$

Solução 2: Repare que manipulando o sistema encontramos:

$$ab = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 16a^2 + b^2 = 5$$

Desenvolvendo a expressão dada:

$$16a^4b^2 - 8a^3b^3 + a^2b^4 = a^2b^2(16a^2 - 8ab + b^2) = (ab)^2[(16a^2 + b^2) - 8(ab)]$$

Ou seja:

$$(ab)^2[(16a^2 + b^2) - 8(ab)] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[(5) - 8\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

Opção E