

Discussões Sobre Física #2

A Pressão de um Gás e a Teoria Cinética dos Gases

Barbosa, L.S.

6 de dezembro de 2011

1 Introdução

Este texto trata da “demonstração” de uma fórmula amplamente utilizada em livros didáticos de física do Ensino Médio e que relaciona-se com a pressão de um gás contido em um recipiente de volume V conhecido.

As passagens matemáticas e suas justificativas aqui apresentadas contém simplificações para facilitar o entendimento, uma vez que nosso intuito não está sobre o resultado final, que é conhecido, mas sobre as etapas que levam à conclusão e que fatos decorrem deste resultado.

2 Pressão de um Gás

2.1 Hipóteses Consideradas

Consideramos, no desenvolvimento da expressão, algumas hipóteses importantes. São elas:

1. As moléculas de um gás estão sujeitas às leis da mecânica Newtoniana;
Isto significa dizer que a conservação da energia, as leis de Newton e conservação da quantidade de movimento podem ser aplicadas aqui.
2. As moléculas estão em movimento retilíneo uniforme de forma desordenada e os choques entre as moléculas e/ou entre as moléculas e o recipiente são perfeitamente elásticas;
Como os choques são elásticos a energia e a quantidade de movimento se conservam.
3. As moléculas não interagem si, a não ser quando colidem umas com as outras; Esta hipótese está diretamente relacionada com as

propriedades de um gás de ser de fácil compressão e expansão.

4. O volume de um gás corresponde praticamente ao “vazio” entre as moléculas;
Esta hipótese faz-se necessária para justificar algumas características dos gases como veremos adiante.
5. Só consideramos o movimento translacional das moléculas, ou seja, tratamos os gases como sendo monoatômicos. Nas considerações finais falamos um pouco mais sobre esta hipótese.

2.2 A Teoria Cinética

2.2.1 Pressão

Imaginemos um cubo de aresta ℓ com um dos seus vértices sobre a origem dos eixos coordenados no \mathbb{R}^3 , como na figura (1).

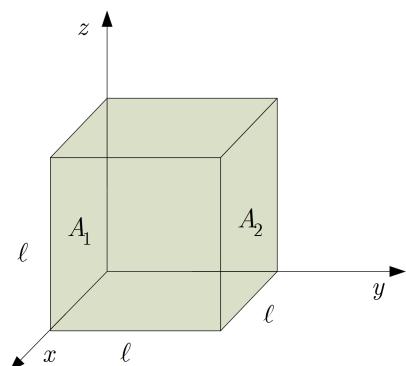


Figura 1: Cubo de aresta ℓ centrado na origem, ou seja, em $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

Seja A_1 uma das faces do cubo e A_2 a face paralela e oposta a A_1 . Sabemos que a velocidade média de uma molécula para ir de A_1 até a face oposta e retornar será dada por:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (1)$$

Para ir a face oposta e voltar, ou seja de A_1 até A_2 e retornar a A_1 o deslocamento em uma direção paralela ao eixo Oy será de 2ℓ então, usando a equação (1) o tempo gasto será de:

$$\Delta t = \frac{2\ell}{v_m} \quad (2)$$

Sabemos que o período é definido como o tempo necessário para que o movimento execute um ciclo completo, então, considerando Δt como o período do movimento da molécula, o número de choques por unidade de tempo – que definimos como a frequência f do movimento – será o inverso do valor dado na equação (2):

$$f = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow f = \frac{v_m}{2\ell} \quad (3)$$

Calculamos agora a variação da quantidade de movimento ΔQ a cada choque da molécula com as paredes do recipiente. Sendo m_0 a massa de uma única molécula teremos:

$$\Delta Q = mv - m_0 v_0 \quad (4)$$

Como o choque é perfeitamente elástico teremos:

$$v = -v_0$$

Isto só ocorre se a velocidade final das paredes do recipiente for a mesma do início, ou seja: zero. Daí:

$$\Delta Q = m(-v_0) - m_0 v_0 \Rightarrow \Delta Q = -2m_0 v_0$$

O sinal só indica que a variação está no sentido contrário ao que chamamos de positivo. Se o gás é composto por N moléculas vamos supor que um terço destas se movimente na direção considerada. Isto é razoável porque uma das hipóteses consideradas é a de que o movimento das moléculas é aleatório (desordenado); temos:

$$\Delta Q_p = 2m_0 v_0 \cdot \frac{N}{3} \quad (5)$$

Usamos o índice p somente para indicar que esta é uma variação parcial da quantidade de movimento, pois sabemos que cada uma destas N moléculas colide com uma frequência f com as paredes do recipiente. Como vimos em (3), podemos agora escrever:

$$\Delta Q_T = 2m_0 v_0 \cdot \frac{N}{3} \cdot \frac{v_m}{2\ell} \quad (6)$$

Em que Q_T é a variação total da quantidade de movimento de todas as moléculas com a frequência considerada. Como o movimento é uniforme, temos $v_m = v_0$ e fazemos:

$$\Delta Q_T = \frac{m_0 v_0^2 \cdot N}{3\ell} \quad (7)$$

Por definição, o impulso causado por uma força é igual a variação da quantidade de movimento:

$$I = \Delta Q \quad (8)$$

Voltando a (7) temos:

$$I = \frac{m_0 v_0^2 \cdot N}{3\ell} \quad (9)$$

Mas temos:

$$\vec{I} = \vec{F} \Delta t \quad (10)$$

Comparando (9) e (10) e, considerando a unidade de tempo, ou seja, $\Delta t = 1\text{s}$:

$$F = \frac{m_0 v_0^2 \cdot N}{3\ell} \quad (11)$$

A pressão é definida pela razão entre o módulo da força aplicada na perpendicular à superfície e a área considerada:

$$p = \frac{|\vec{F}|}{A} \quad (12)$$

As faces do cubo são quadrados de lado ℓ :

$$p = \frac{F}{A} \Rightarrow p = \frac{m_0 v_0^2 \cdot N}{3\ell \cdot \ell^2}$$

O produto $m_0 \cdot N$ equivale a massa m do gás e o volume V do cubo é dado por ℓ^3 :

$$p = \frac{mv_0^2}{3V} \quad (13)$$

Esta é a pressão de um gás contido em um recipiente de volume conhecido e cuja velocidade média das moléculas também é conhecida.

Notamos que a pressão é diretamente proporcional a massa e a velocidade das moléculas, mas é inversamente proporcional em relação ao volume.

2.2.2 Energia Cinética

A energia cinética de um corpo qualquer de massa m é definida por:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (14)$$

Substituindo (14) em (13):

$$3pV = 2E_c \Rightarrow E_c = \frac{3}{2}pV \quad (15)$$

Da equação de Clapeyron¹:

$$pV = nRT \quad (16)$$

Daí:

$$3pV = 2E_c \Rightarrow E_c = \frac{3}{2}nRT \quad (17)$$

O que nos mostra que a energia de um gás é função de sua temperatura. Quanto maior a temperatura, maior a energia cinética. Outra conclusão importante é o fato de que a quantidade de energia depende do número de mols do gás. Em outras palavras isto quer dizer que mais gás equivale a uma quantidade maior de energia, mas como veremos adiante, não corresponde a uma média maior de energia por molécula.

2.2.3 Velocidade das Moléculas

A partir de (17) podemos escrever:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}nRT \quad (18)$$

Como sabemos que:

$$n = \frac{m}{M}$$

¹Benoit Paul Émile Clapeyron (Paris, 26 de Fevereiro de 1799 Paris, 28 de Janeiro de 1864) foi um engenheiro e físico francês. Foi um dos fundadores da termodinâmica.

em que M é a massa molar, podemos reescrever:

$$v^2 = \frac{3RT}{M} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad (19)$$

A partir desta expressão vemos que quanto maior a temperatura, maior a velocidade das suas moléculas.

2.3 Energia Cinética Média

Seja N_A o número de Avogadro², ou seja, $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ que chamamos por opção de mol. Então o número de mols de um gás é a comparação direta entre a quantidade N de moléculas do gás e N_A :

$$n = \frac{N}{N_A}$$

Dividindo então a equação (17) por N obtemos:

$$\frac{E_c}{N} = \frac{3nRT}{2N} \quad (20)$$

Fazendo

$$\frac{E_c}{N} = e_c$$

Chegamos a:

$$e_c = \frac{3RT}{2N_A} \quad (21)$$

²Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, conde de Quaregna e Cerreto (Turim, 9 de Agosto de 1776 Turim, 9 de Julho de 1856), foi um advogado e físico italiano, um dos primeiros cientistas a distinguir átomos e moléculas. É mais conhecido por suas contribuições para a teoria molecular. Em sua homenagem, o número de entidades elementares (átomos, moléculas, íons, ou outra partícula) presentes em 1 mol dessa substância, é conhecido como constante de Avogadro, cujo valor $6,02 \times 10^{23}$.

Seu pai, Conde Filippo Avogadro, foi um célebre advogado, sendo eleito presidente do senado de Piemonte em 1779. Foi para a escola de Turim, seguir carreira de advogado eclesiástico. Formando-se em bacharel em 1792, com 16 anos. 4 anos depois defendeu seu doutorado. Mesmo tendo uma carreira de sucesso na advocacia (fora secretário da prefeitura de Eridano) Avogadro se interessava pelas Ciências Naturais. Ainda como secretário da cidade de Eridano, Avogadro comeu a estudar Ciências por conta própria: Física e Química. Em 1809 passou a lecionar física no Realle Collegio de Varcelli. Em 1820 ingressa na Universidade de Turim como responsável pela cadeira de física. Trabalhou por 30 anos lá, período em que boa parte de sua obra foi publicada. Elaborou a Hipótese de Avogadro, que dizia: “*Volumes iguais de gases diferentes à mesma temperatura e pressão contêm o mesmo número de moléculas*”. Morreu em Turim em 9 de julho de 1856.

A razão de R por N_A chamamos de constante de Boltzmann³ e simbolizamos por k :

$$e_c = \frac{3kT}{2} \quad (22)$$

Esta conclusão é surpreendente. Ela nos diz que ao colocarmos em contato dois gases à mesma temperatura sua energia cinética total é maior, mas a energia cinética média não se alterará, porque não haverá mudança de temperatura, grandeza da qual e_c é função exclusiva.

3 Considerações Finais

Como dito nas hipóteses, os gases foram tratados como monoatômicos. O que quer dizer basicamente que só observamos a energia associada à translação das moléculas do gás.

Quando o gás é composto por moléculas diatônicas precisamos levar em conta o movimento de rotação. Esta divisão da energia entre os movimentos de translação e rotação é descrito pelo que chamamos de princípio da equipartição da energia e está relacionado com o número de graus de liberdade associados a molécula. Para uma molécula monoatônica teremos três graus de liberdade correspondendo aos três eixos de movimento (Ox , Oy e Oz).

O princípio da equipartição da energia afirma que cada grau possui $\frac{1}{2}kT$, ou seja, para três graus teremos exatamente a equação (22).

Para uma molécula constituída de dois átomos (diatônica), temos 5 graus de liberdade (os 3 da base do \mathbb{R}^3 mais 2 eixos de rotação. Assim a equação (22) fica:

$$e_c = \frac{5kT}{2} \quad (23)$$

³Ludwig Eduard Boltzmann (Viena, 20 de Fevereiro de 1844 Duino-Aurisina, 5 de Setembro de 1906) foi um físico austríaco, conhecido pelo seu trabalho nos campo da termodinâmica estatística. É considerado junto com Josiah Willard Gibbs e James Clerk Maxwell como o fundador da mecânica estatística. Foi defensor da teoria atômica, numa época em que esta era bem controversa.

Nosso intuito é analisar os casos mais simples, como visto na introdução, para maiores referências veja [2].

4 Conclusão

Obviamente as demonstrações apresentadas neste texto exigem simplificações matemáticas e as hipóteses consideradas, mas sua importância para o aprendizado está muito mais presente no fato de ser possível resgatar conceitos como período, frequência, velocidade média, impulso, energia e outros do que na conclusão em si.

Conceitos como esses não só ajudam o aluno a entender o que está “nos bastidores”, mas também a relação entre os muitos conceitos físicos que aprende ao longo do ensino médio.

Referências

- [1] Junior, F. R., Ferraro, N. G., & Soares, P. A. (1993). *Os Fundamentos da Física* (Vol. 2). São Paulo, Brasil: Moderna.
- [2] Young, H. D., & Freedman, R. A. (2003). *Física II: Termodinâmica e Ondas* (10^a ed.). São Paulo: Pearson.
- [3] Ludwig Boltzmann. (s.d.). Acesso em 06 de Dezembro de 2011, disponível em Wikipédia: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ludwig_Boltzmann
- [4] Clapeyron. (s.d.). Acesso em 06 de Dezembro de 2011, disponível em Wikipédia: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Clapeyron>
- [5] Avogadro. (s.d.). Acesso em 06 de Dezembro de 2011, disponível em Wikipédia: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Avogadro>