Tira-Teima

Curso Mentor

Barbosa, L. S.
leonardosantos.inf@gmail.com

18 de fevereiro de 2012

Lista de Siglas

EEAr .... Escola de Especialistas da Aeronáutica
CMRJ .... Colégio Militar do Rio de Janeiro
CN .... Colégio Naval

Sumário

Capítulo 1

Álgebra

1.1 Radicais e Racionalização

Q1. (CN) Se $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{y^4x^2}}=a$, então $D=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$. Calcule D em função de a.

Solução:
Colocando o termo quadrático em evidência teremos:

$$\left(x^2+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(y^2+y^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=a$$

$$\Rightarrow\left[x^2\left(1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[y^2\left(1+y^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=a$$

Desenvolvendo a expressão dentro dos parênteses temos:

$$\left[x^2\left(1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[y^2\left(1+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=a$$

$$\left[x^2\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[y^2\left(\frac{y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=a$$

Cancelando os termos quadráticos com seus respectivos denominadores:

$$\left[x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}+\left[y^{\frac{4}{3}}\left(y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=a$$

Colocando $\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ em evidência:

$$\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(x^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]=a$$

Como $D=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$ teremos:

$$\sqrt{D}\cdot D=a$$

$$D^{\frac{3}{2}}=a\Rightarrow D=a^{\frac{2}{3}}$$

1.2 Polinômios

Q2. Sejam a, b, c e d reais tais que $a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}$, $b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}}$, $c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}}$ e $d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}$. Calcule o valor de $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Solução:
Desenvolvendo cada um dos valores:
1)
$$a = \sqrt{45 - \sqrt{21 - a}}$$
Elevando ao quadrado de ambos os lados:
$$a^2 = 45 - \sqrt{21 - a}$$
$$\sqrt{21 - a} = 45 - a^2$$
Elevando mais uma vez ao quadrado:
$$21 - a = \left(45 - a^2\right)^2$$
$$21 - a = 2025 - 90a^2 + a^4$$
$$a^4 - 90a^2 + a + 2004 = 0$$
2)
$$b = \sqrt{45 + \sqrt{21 - b}}$$
Elevando ao quadrado de ambos os lados:
$$b^2 = 45 + \sqrt{21 - b}$$
$$\sqrt{21 - b} = 45 - b^2$$
Elevando mais uma vez ao quadrado:
$$21 - b = \left(45 - b^2\right)^2$$
$$21 - b = 2025 - 90b^2 + b^4$$
$$b^4 - 90b^2 + b + 2004 = 0$$
3)
$$c = \sqrt{45 - \sqrt{21 + c}}$$
Elevando ao quadrado de ambos os lados:
$$c^2 = 45 - \sqrt{21 + c}$$
$$\sqrt{21 + c} = 45 - c^2$$
Elevando mais uma vez ao quadrado:
$$21 + c = \left(45 - c^2\right)^2$$
$$21 + c = 2025 - 90c^2 + c^4$$

$$c^4 - 90c^2 - c + 2004 = 0$$

4)

$$d = \sqrt{45 + \sqrt{21 + d}}$$

Elevando ao quadrado de ambos os lados:

$$d^2 = 45 + \sqrt{21 + d}$$

$$\sqrt{21 + d} = 45 - d^2$$

Elevando mais uma vez ao quadrado:

$$21 + d = \left(45 - d^2\right)^2$$

$$21 + d = 2025 - 90d^2 + d^4$$

$$d^4 - 90d^2 - d + 2004 = 0$$

Agora comparamos as quatro equações:

$$a^4 - 90a^2 + a + 2004 = 0$$

$$b^4 - 90b^2 + b + 2004 = 0$$

$$c^4 - 90c^2 - c + 2004 = 0$$

$$d^4 - 90d^2 - d + 2004 = 0$$

Repare que a primeira e a segunda equações têm a mesma forma. Isto significa que as soluções da primeira equação são:

$$S_1 = \{a, b, \alpha_1, \alpha_2\}$$

Note que a e b são distintos pelo próprio enunciado da questão. A segunda equação possui as seguintes soluções:

$$S_2 = \{a, b, \beta_1, \beta_2\}$$

A terceira e a quarta equações têm a mesma forma. Isto significa que as soluções da terceira equação são:

$$S_3 = \{c, d, \theta_1, \theta_2\}$$

Mas c e d são distintos pelo próprio enunciado da questão. Consequentemente as soluções da quarta equação são:

$$S_4 = \{c, d, \gamma_1, \gamma_2\}$$

Olhando a terceira equação e comparando com a primeira, notamos que $-c$ é solução da primeira equação, portanto, $-d$ também o será. Logo o conjunto S_1 fica:

$$S_1 = \{a, b, -c, -d\}$$

Ou seja, o conjunto S_3, pelo mesmo motivo fica:

$$S_3 = \{c, d, -a, -b\}$$

Para conferir basta substituir b na primeira equação e obteremos a segunda. Se substituirmos $-c$ ou $-d$ obteremos a terceira e a quarta respectivamente. Analogamente teremos:

$$S_2 = \{a, b, -c, -d\}$$

$$S_4 = \{c, d, -a, -b\}$$

Como queremos $abcd$ basta usarmos as relações de Girard na primeira equação para calcular o produto das raízes de um polinômio:

$$P = \frac{2004}{1} \Rightarrow abcd = 2004$$

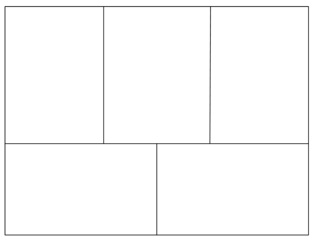
Colaborador: Arnaldo Nascimento

Capítulo 2

Geometria

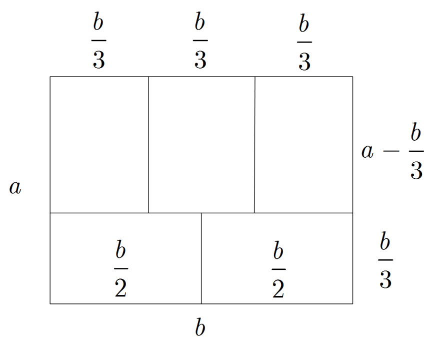
2.1 Quadriláteros

Q3. (CMRJ – 2010/2011 – 1º Ano) O retângulo da figura, cujo perímetro é 176 cm, está dividido em cinco retângulos congruentes entre si. A área de cada um desses 5 retângulos, em cm^2, é:



a)246 b)320 c)384 d)408 e)510

Solução:
Primeiro vamos dar nomes aos lados do retângulo maior. Seja então b a maior dimensão e a a menor dimensão. Como os cinco retângulos são congruentes teremos a figura a seguir.



Sabemos que o perímetro $2p$ vale 176, então:

$$2a + 2b = 176 \Rightarrow a + b = 88$$

Pela figura anterior há a seguinte relação entre os lados:

$$\frac{b}{2} = a - \frac{b}{3}$$

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{3} = a \Rightarrow a = \frac{5}{6}b$$

Teremos então o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = 88 \\ a = \dfrac{5}{6}b \end{cases}$$

Agora substituindo a segunda equação na primeira teremos:

$$\frac{5}{6}b + b = 88$$

Multiplicando toda a equação por 6:

$$5b + 6b = 6 \cdot 88$$

Portanto:

$$11b = 6 \cdot 88 \Rightarrow b = 48$$

Voltando à primeira equação do sistema teremos:

$$a + 48 = 88 \Rightarrow a = 40$$

A área A do maior retângulo é:

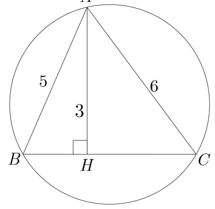
$$A = 40 \cdot 48$$

A área s de cada retângulo menor é:

$$s = \frac{40 \cdot 48}{5} \Rightarrow s = 8 \cdot 48 \Rightarrow s = 348\,\text{cm}^2$$

2.2 Círculos

Q4. (EEAr) Seja o triângulo ABC abaixo, circunscrito pelo círculo de centro O.

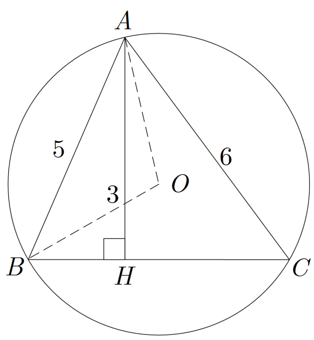


Sabendo que $AB = 5$, $AC = 6$ e a altura relativa ao lado BC é $AH = 3$. Conforme a figura abaixo. Calcule o raio do círculo.

Solução 1:
Vamos calcular o seno do ângulo $A\hat{C}B$:

$$\sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{3}{6} \Rightarrow \sin\left(A\hat{C}B\right) = \frac{1}{2}$$

Podemos concluir que o ângulo $A\hat{C}B$ vale $30°$.
Vamos marcar na figura o centro do círculo e traçar OA e OB:



Como $A\hat{C}B = 30°$ o arco AB vale $60°$ (arco subentendido) e $A\hat{O}B = 60°$ (ângulo central). O triângulo AOB é equilátero, pois $OA = OB = r$ e $A\hat{O}B = 60°$. Portanto o raio do círculo vale:

$$r = 5$$

Solução 2:
A área de um triângulo qualquer de lados a, b e c inscrito em um círculo de raio R, pode ser escrita como sendo:

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Como ABH é retângulo temos:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$

$$25 = 9 + BH^2$$

$$BH = 5$$

AHC também é retângulo logo:

$$AC^2 = AH^2 + CH^2$$

$$36 = 9 + CH^2$$

$$CH = 3\sqrt{3}$$

A área do triângulo ABC é dada por:

$$S = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

Comparando as expressões:

$$\frac{\left(4+3\sqrt{3}\right)\cdot 3}{2} = \frac{5\cdot 6\cdot \left(4+3\sqrt{3}\right)}{4R}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{5\cdot 6}{4R}$$

$$R = 5$$