Radicais

Definição

Por definição temos que:

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

Observação 1: Se **n** é **par** devemos ter que **a** é **positivo**.

Observação 2: Por definição temos: $\begin{cases} \sqrt[n]{1} = 1 \\ \sqrt[n]{0} = 0 \end{cases}$.

Observação 3: Chamamos de radicais **semelhantes**, radicais que contêm o mesmo **índice** e o mesmo **radicando** (número dentro da raiz). Por exemplo, $2\sqrt{3}$ e $7\sqrt{3}$.

Exemplo 1: $\sqrt{4} = 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4$

Exemplo 2: $\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27$

Expoente Fracionário

Toda vez que temos um expoente que é um número racional[1] podemos transformar este expoente em um radical cuja potência é o inverso do índice da raiz:

Exemplo 1: $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$

Exemplo 2: $\sqrt[4]{\frac{2}{7}} = \left(\frac{2}{7}\right)^{\frac{1}{4}}$

Exemplo 3: $\frac{1}{\sqrt[23]{5}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{23}}$

Extração da Raiz Quadrada

Agora que definimos o expoente racional como sendo uma raiz cujo índice é o denominador da fração, podemos pensar na extração da raiz quadrada como sendo a divisão entre o expoente obtido pela fatoração da base dividido pelo denominador desta mesma fração. Veja os exemplos:

Exemplo 1: Calcular a raiz quadrada de 16.

Solução: Fatorando 16 encontramos:

$$16 = 2^4$$

Assim como queremos a raiz quadrada temos:

$$\sqrt{16} = \sqrt{2^4} = \left(2^4\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} = 2^2 = 4$$

Se esta divisão não resultar em um número inteiro, o resto da divisão será o expoente da parcela que fica dentro do radical:

Exemplo 2: Calcular a raiz quadrada de 32.

Solução: Fatorando 32 encontramos:

$$32 = 2^5$$

Assim como queremos a raiz quadrada temos:

[1] Lembre-se que um número racional é todo aquele que **pode ser escrito sob a forma de fração**.

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{2+\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{2}$$

Repare que na divisão de 5 por 2 temos quociente 2 e resto 1. Outra observação é que aplicamos aqui propriedades de potências que você já deve conhecer de antemão. Abaixo você verá algumas dessas propriedades novamente, mas é importante que você já as tenha visto, pelo menos uma vez, antes.

Raiz de um Produto

A raiz de um produto é dada pelo produto das raízes. Ou seja:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Exemplo 1: Calcular a raiz cúbica de 24.
Solução: Fatorando 24 encontramos:

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

Então:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

Raiz de um Quociente

A raiz de um quociente é dada pelo quociente das raízes. Ou seja:

Exemplo 1: Calcular a raiz $\sqrt{\dfrac{144}{25}}$

Solução: Usando a definição dada:

$$\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{12^2}}{\sqrt{5^2}} = \frac{12}{5}$$

Operações com Radicais

Adição e Subtração

A adição e a subtração só são possíveis entre radicais semelhantes. Devemos colocar em evidência os radicais e somar a parte racional:

$$a\sqrt[n]{b} \pm c\sqrt[n]{b} = \left(a \pm c\right)\sqrt[n]{b}$$

Exemplo 1: Calcular a soma $5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$.
Solução: Usando a propriedade:

$$5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = \left(5 + 7 - 3\right)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

Produto e Quociente

Para fazer o produto ou quociente entre dois radicais ele deverão ter ou o mesmo índice no radical ou o mesmo radicando:

Mesmo índice:

Produto: $a\sqrt[n]{b} \cdot c\sqrt[n]{d} = ac\sqrt[n]{bd}$

Divisão: $\dfrac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[n]{d}} = \dfrac{a}{c}\sqrt[n]{\dfrac{b}{d}}$

Observação 1: Note que este resultado é uma mera consequência da propriedade da potência de um produto (ou divisão) qualquer.

Exemplo 1: Calcular o produto $5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2}$.
Solução: Usando a propriedade:

$$5\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} = 5 \cdot 7\sqrt{3 \cdot 2} = 35\sqrt{6}$$

Exemplo 2: Calcular o quociente $\dfrac{35\sqrt{24}}{5\sqrt{12}}$.

Solução: Usando a propriedade:

$$\frac{35\sqrt{24}}{5\sqrt{12}} = \frac{35}{5}\cdot\sqrt{\frac{24}{12}} = 7\sqrt{2}$$

Mesmo radicando:

Produto: $a\sqrt[n]{b}\cdot c\sqrt[p]{b} = ac\sqrt[np]{b^{n+p}}$

Divisão: $\dfrac{a\sqrt[n]{b}}{c\sqrt[p]{b}} = \dfrac{a}{c}\sqrt[np]{b^{n-p}}$

Observação 2: Note que este resultado é uma mera consequência da propriedade da de um produto (ou divisão) de potência de mesma base.

Exemplo 1: Calcular o produto $5\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{3}$.

Solução: Usando a propriedade:

$$5\sqrt{3}\cdot 7\sqrt[5]{3} = 35\cdot\sqrt[10]{3^{2+5}} = 35\cdot\sqrt[10]{3^7}$$

Exemplo 2: Calcular o quociente $\dfrac{15\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[5]{9}}$.

Solução: Usando a propriedade:

$$\frac{15\sqrt[3]{9}}{3\sqrt[5]{9}} = \frac{15}{3}\cdot\sqrt[15]{(9)^{5-3}} = 5\sqrt[15]{9^2}$$

Potência

Para calcular a potência de um radical basta repetir a base e multiplicar os expoentes.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^b = (a)^{\frac{1}{n}\cdot b}$$

Exemplo 1: Calcular o valor de $\left(\sqrt[5]{8}\right)^{10}$.

Solução: Basta aplicar a propriedade:

$$\left(\sqrt[5]{8}\right)^{10} = 8^{\frac{1}{5}\cdot 10} = 8^2 = 64$$

Observação 3: Note que calcular a raiz de uma raiz é o mesmo que calcular a potência de uma raiz, pela própria definição, dada aqui, de expoente fracionário.

Racionalização

O processo de racionalização consiste de um recurso matemático para eliminar do denominador de uma fração um radical qualquer. Isto é feito por motivo de padronização matemática e simplicidade de cálculos. Veja a situação abaixo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ racionalizado fica } \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $\sqrt{2} = 1,414213562373...$ veja que calcular $\dfrac{1,414213562373...}{2}$ (valor racionalizado) é muito mais imediato que encontrar o resultado de $\dfrac{1}{1,414213562373...}$.

Não existe fórmula para racionalizar, mas certos casos são comuns e são melhores entendidos através de exemplos. Vamos então a eles:

Exemplo 1: Racionalizar o denominador de $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Solução: Vamos multiplicar a fração por $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, então:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exemplo 2: Racionalizar o denominador de $\frac{5}{\sqrt[3]{2}}$.

Solução: Vamos multiplicar a fração por $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}}$:

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

Exemplo 3: Racionalizar o denominador de $\frac{5}{3-\sqrt{3}}$.

Solução: Vamos multiplicar a fração por $\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$:

$$\frac{5}{3-\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{5\left(3+\sqrt{3}\right)}{9-\sqrt{3^2}} = \frac{5\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$$

Exemplo 4: Racionalizar o denominador de $\frac{1}{1-\sqrt[3]{5}}$.

Solução: Lembrando que

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

Vamos multiplicar a fração por $\frac{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$:

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}} = \frac{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{1-\sqrt[3]{125}} = -\frac{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}{4}$$

Exemplo 5: Racionalizar o denominador de $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}}$.

Solução: Sempre que houver raízes de índice par, o ideal é começar usando a propriedade da diferença de dois quadrados:

Vamos multiplicar a fração por $\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}{4-\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4^3}-\sqrt[3]{25}}$$

Usando a diferença de cubos, vamos multiplicar por $\frac{\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 125}+\sqrt[3]{125^2}}{\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 125}+\sqrt[3]{125^2}}$:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{4^3}-\sqrt[3]{25}} \cdot \frac{\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}}{\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}\right)}{\sqrt[3]{4^9}+\sqrt[3]{4^6\cdot 25}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25^2}-\sqrt[3]{4^6\cdot 25}-\sqrt[3]{4^3\cdot 25^2}-\sqrt[3]{25^3}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}\right)}{\sqrt[3]{4^9}-\sqrt[3]{25^3}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}\right)}{64-25}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{4^6}+\sqrt[3]{4^3\cdot 25}+\sqrt[3]{25^2}\right)}{39}$$

Radical Duplo

Seja o seguinte radical duplo:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}$$

Queremos transformá-lo em um radical simples da forma:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Ou seja:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

Elevando ao quadrado de ambos os lados:

$$\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2 \Rightarrow A+\sqrt{B}=x+2\sqrt{xy}+y$$

Assim, para que a igualdade se verifique devemos ter:

$$\begin{cases} A = x+y \\ \sqrt{B}=2\sqrt{xy} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = x+y \\ B = 4xy \end{cases}$$

Sendo x e y raízes de uma equação do 2ª grau, temos a soma e o produto em função de A e B, respectivamente. Então podemos escrever a seguinte equação do segundo grau em função de z:

$$z^2 - Az + \frac{B}{4} = 0$$

Solucionando esta equação encontramos:

$$z = \frac{-(-A)\pm\sqrt{(-A)^2-4\cdot 1\cdot \frac{B}{4}}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \\ z_2 = \dfrac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \end{cases}$$

Como x e y são as raízes:

$$\begin{cases} x = \dfrac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} \\ y = \dfrac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \end{cases}$$

Fazendo $C=\sqrt{A^2-B}$ teremos:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

Exemplo 1: Transformar o radical duplo $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ em um radical simples.

Solução: Primeiro precisamos colocar o radical duplo na forma $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

$$\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{6-\sqrt{20}}$$

Calculando C:

$$C=\sqrt{6^2-20}\Rightarrow C=\sqrt{16}\Rightarrow C=4$$

Usando a expressão dada:

$$\sqrt{6-\sqrt{20}}=\sqrt{\frac{6+4}{2}}-\sqrt{\frac{6-4}{2}}=\sqrt{5}-1$$

Exercícios de Fixação

1) Assinale a alternativa em que temos um par de radicais semelhantes:

a) $9\sqrt{2}$ e $4\sqrt{3}$

b) $5\sqrt{2}$ e $4\sqrt[3]{2}$

c) $-2\sqrt[3]{9}$ e $3\sqrt[3]{9}$

d) $7\sqrt{5}$ e $7\sqrt[3]{2}$

e) $3\sqrt{7}$ e $-3\sqrt{6}$

2) O valor de $\sqrt{0,444...}$ é:

a) 0,222... b) 0,333... c) 0,0444... d) 0,666...

3) A diferença $27^{0,333...}-16^{0,75}$ é igual a:

a) 5 b) 6 c) -5 d) -6 e) 2

4) O valor de $-2^{-2^{-2}}$ é:

a) -16 b) 16 c) $\frac{1}{16}$ d) $-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ e) Impossível

5) O resultado da operação $\sqrt{27}-\sqrt{3}-\sqrt{12}$ é:

a) 0 b) $2\sqrt{3}$ c) 6 d) $3\sqrt{3}$

6) Racionalizando-se a expressão $\frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{a^{n-2}}}$, obtemos:

a) $\sqrt[n]{a^{m-n+2}}$ b) $\sqrt[n]{a^{m-n-2}}$ c) $m+n-2$ d) $m-n-2$ e) $\frac{\sqrt[n]{a^{m+2}}}{a}$

7) O valor da expressão $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, é:

a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ c) 2 d) $\sqrt{2}+1$

Gabarito

1) C
2) D
3) C
4) D
5) A
6) E
7) A