Curso Mentor

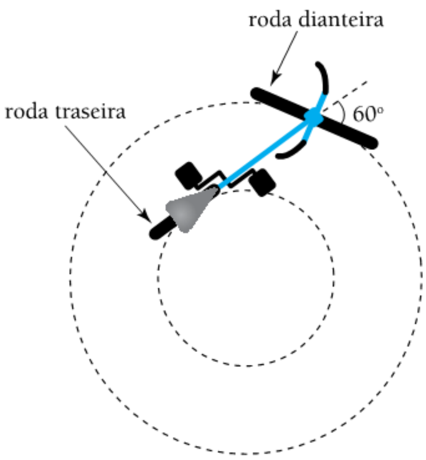
Soluções das Questões de Matemática da Universidade do Estado do Rio de Janeiro – UERJ

Vestibular 2011

2º Exame de Qualificação 2011

Questão 30

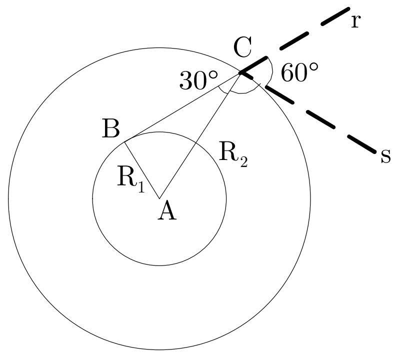
Um ciclista pedala uma bicicleta em trajetória circular de modo que as direções dos deslocamentos das rodas mantêm sempre um ângulo de 60°. O diâmetro da roda traseira dessa bicicleta é igual à metade do diâmetro de sua roda dianteira.
O esquema a seguir mostra a bicicleta vista de cima em um dado instante do percurso.



Admita que, para uma volta completa da bicicleta, N_1 é o número de voltas dadas pela roda traseira e N_2 o número de voltas dadas pela roda dianteira em torno de seus respectivos eixos de rotação. A razão $\frac{N_1}{N_2}$ é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Solução:
Seja R_1 o raio da circunferência menor e R_2, o da circunferência maior. Fazendo uma figura teremos:



O triângulo ABC é retângulo em B, que é o ponto de tangência da reta r com a circunferência menor. Então:

$$\text{sen } 30° = \frac{R_1}{R_2}$$

Logo:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}$$

Seja então r_1 o raio da roda menor e r_2 o radio da maior. Do enunciado temos que:

$$2(2r_1) = 2r_2 \Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{2}$$

Então:

$$2\pi R_1 = N_1 \cdot 2\pi r_1$$
$$2\pi R_2 = N_2 \cdot 2\pi r_2$$

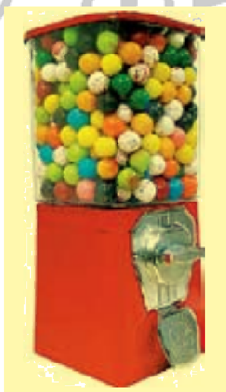
Dividindo uma equação pela outra:

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{N_1}{N_2} = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 1$$

Opção A

Utilize as informações a seguir para responder às questões de números 32 e 33.

Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso. Observe a ilustração:



Questão 32

Para garantir a retirada de 4 bolas de uma mesma cor, o menor número de moedas a serem inseridas na máquina corresponde a:

(A) 5 (B) 13 (C) 31 (D) 40

Solução:
Vamos chamar as 10 cores de A, B, C, D, E, F, G, H, I e J. Supondo que a cada moeda saia uma cor diferente teremos:

ABCDEFGHIJABCDEFGHIJABCDEFGHIJ

Repare que este é o pior caso possível, mas **garante** que ao inserir uma nova moeda sairá uma cor que terá se repetido **4** vezes. Ou seja, na 31ª moeda, obrigatoriamente teremos uma 4ª repetição de cor.

Opção C

Questão 33

Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas, é aproximadamente de:

(A) 0,008 (B) 0,025 (C) 0,040 (D) 0,072

Solução:
Devemos ter entre 3 bolas retiradas duas de cor branca. Como a retirada de cada bola é equiprovável e os eventos são independentes teremos:
Probabilidade de sair uma bola branca:

$$P_{B1} = \frac{10}{100}$$

Probabilidade de sair uma segunda bola branca:

$$P_{B2} = \frac{9}{99}$$

Probabilidade de sair uma bola diferente da cor branca:

$$P = \frac{90}{98}$$

Deve-se lembrar que há **3 possibilidades** para a saída de duas bolas brancas:

$$BBX, BXB, XBB$$

Onde **X** representa uma cor qualquer, então:

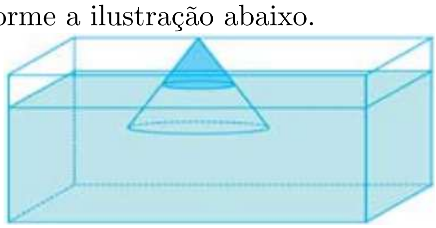
$$P_{Total} = 3 \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{9}{99} \cdot \frac{90}{98}$$

$$P_{Total} = 3 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{1}{98} \Rightarrow P_{Total} = \frac{27}{1078} \Rightarrow P_{Total} = 0,025$$

Opção B

Questão 35

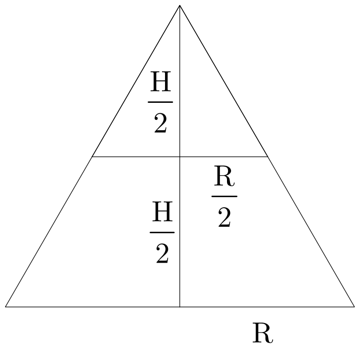
Um sólido com a forma de um cone circular reto, constituído de material homogêneo, flutua em um líquido, conforme a ilustração abaixo.



Se todas as geratrizes desse sólido forem divididas ao meio pelo nível do líquido, a razão entre o volume submerso e o volume do sólido será igual a:

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{7}{8}$

Solução:
Vamos fazer uma seção transversal do cilindro passando pelo seu vértice e pelo centro da base:



Calculando o volume superior (v):

$$v = \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2}}{3}$$

Calculando o volume total (V):

$$V = \frac{\pi(R)^2 \cdot H}{3}$$

O volume submerso (V_S) então será:

$$V - v = \frac{\pi(R)^2 \cdot H}{3} - \frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 \cdot \frac{H}{2}}{3}$$

$$V - v = \frac{\pi R^2 H - \pi\frac{R^2 H}{8}}{3} \Rightarrow V - v = \frac{\pi R^2 H}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

$$V_S = \frac{7\pi R^2 H}{24}$$

Fazendo $\frac{V_S}{V}$ temos:

$$\frac{V_S}{V} = \frac{\frac{7\pi R^2 H}{24}}{\frac{\pi R^2 H}{3}} \Rightarrow \frac{V_S}{V} = \frac{7\pi R^2 H}{24} \cdot \frac{3}{\pi R^2 H}$$

$$\frac{V_S}{V} = \frac{7}{8}$$

Opção D

Questão 36

Questão 37

Essas duas questões tratam de assuntos que envolvem mais física do que matemática.
Colocamos então sua solução em nosso material de **física** no site
http://www.cursomentor.wordpress.com

Questão 38

A definição apresentada pelo personagem não está correta, pois, de fato, duas grandezas são inversamente proporcionais quando, ao se multiplicar o valor de uma delas por um número positivo, o valor da outra é dividido por esse mesmo número.
Admita que a nota em matemática e a altura do personagem da tirinha sejam duas grandezas, x e y, inversamente proporcionais.
A relação entre x e y pode ser representada por:

(A) $y = \frac{3}{x^2}$ (B) $y = \frac{5}{x}$ (C) $y = \frac{2}{x+1}$ (D) $y = \frac{2x+4}{3}$

Solução:
Seja a regra de três inversa abaixo, em que x e y são inversamente proporcionais:

$$\begin{array}{c} x — y \\ a — b \end{array}$$

Teremos então:

$$xy = ab$$

O que nos dá:

$$y = \frac{ab}{x}$$

Fazendo $ab = 5$ teremos:

$$y = \frac{5}{x}$$

Opção B

Observação: A opção C poderia nos confundir, mas ela supõe que y e $x+1$ são inversamente proporcionais. Fazendo $x+1=k$ teremos a mesma forma anterior. Além disso, basta um exemplo para provar o que estamos falando:
Seja o par $(1,1)$ que pertence a curva $y = \frac{2}{x+1}$, fazendo $x = 2$ deveríamos ter $y = \frac{1}{2}$, no entanto:

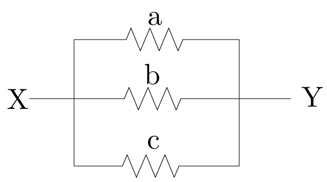
$$y = \frac{2}{3}$$

O que comprova o que foi dito anteriormente.

1º Exame de Qualificação 2011

Questão 26

Observe a representação do trecho de um circuito elétrico entre os pontos X e Y, contendo três resistores cujas resistências medem, em ohms, a, b e c.



Admita que a sequência (a, b, c) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e que a resistência equivalente entre X e Y mede 2,0 Ω. O valor, em ohms, de $(a+b+c)$ é igual a:

(A) 21,0 (B) 22,5 (C) 24,0 (D) 24,5

Solução:
A resistência equivalente entre os pontos X e Y é dada por:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Rearrumando os termos teremos:

$$\frac{ab+ac+bc}{abc}=\frac{1}{2}$$

Reescrevendo os valores em função de uma PG de três termos de razão $\frac{1}{2}$ temos:

$$PG\left(a,\frac{a}{2},\frac{a}{4}\right)$$

Então:

$$\frac{a\cdot\left(\frac{a}{2}\right)+a\cdot\left(\frac{a}{4}\right)+\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{4}\right)}{a\cdot\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{4}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)}{a^3\cdot\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{1}{16}}\Rightarrow a=\frac{7}{8}\cdot\frac{16}{1}\Rightarrow a=14$$

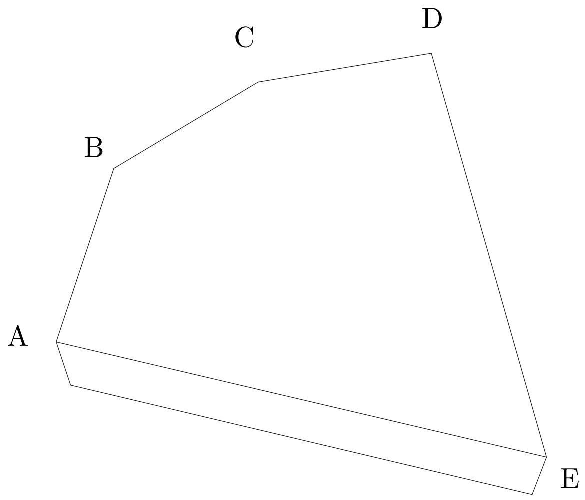
A PG então fica $\left(14,7,\frac{7}{2}\right)$, somando seus termos temos:

$$\frac{7}{2}+7+14=21+3,5=24,5$$

Opção D

Questão 33

A embalagem de papelão de um determinado chocolate, representada na figura abaixo, tem a forma de um prisma pentagonal reto de altura igual a 5 cm.



Em relação ao prisma, considere:

— cada um dos ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ e $\hat{D}$ da base superior mede 120°;

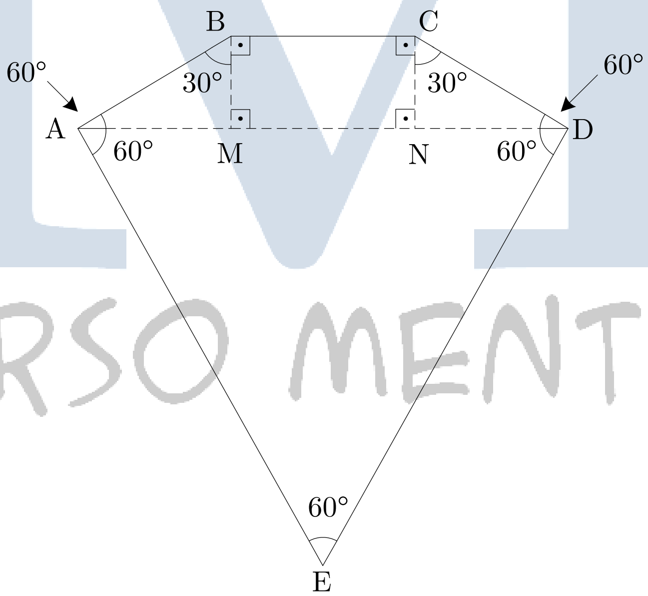
— as arestas $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, e $\overline{CD}$ medem 10 cm cada.

Considere, ainda, que o papelão do qual é feita a embalagem custa R$ 10,00 por m^2 e que $\sqrt{3} = 1,73$. Na confecção de uma dessas embalagens, o valor, em reais, gasto somente com o papelão é aproximadamente igual a:

(A) 0,50 (B) 0,95 (C) 1,50 (D) 1,85

Solução:

As partes superior e inferior da caixa do chocolate podem ser vistas como abaixo:



Como sabemos, a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada por:

$$S_i = 180°(n-2)$$

Portanto, o ângulo $\hat{E}$ é dado por:

$$S_i = 180°(5-2) \Rightarrow 120 \cdot 4 + \hat{E} = 540° \Rightarrow \hat{E} = 540° - 480°$$

$$\hat{E} = 60°$$

Como $\hat{A} = \hat{D} = 120°$ temos que a figura é simétrica. Traçamos o segmento $\overline{AD}$, $\overline{AE} = \overline{DE}$ e o triângulo ΔADE é equilátero, portanto $D\hat{A}E = A\hat{D}E = 60°$. Além disso, também como consequência, $B\hat{A}M = C\hat{D}N = 60°$.

Agora, traçando os segmentos $\overline{BM}$ e $\overline{CN}$ ambos perpendiculares a $\overline{BC}$ teremos $A\hat{B}M = D\hat{C}N = 30°$ e os triângulos retângulos congruentes $\Delta ABM \equiv \Delta CDN$.
A área da figura será a soma das áreas do trapézio isósceles ABCD e do triângulo ΔADE.

Cálculo da área do trapézio ABCD:

$$S_{ABCD} = \left(\frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}\right)\overline{BM}$$

Precisamos calcular $\overline{BM}$ e $\overline{AD}$. Cálculo de $\overline{BM}$:

$$\cos 30° = \frac{\overline{BM}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\overline{BM}}{10} \Rightarrow \overline{BM} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

Cálculo de $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND}$$

$$\cos 60° = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AM}}{10} \Rightarrow \overline{AM} = 5 \text{ cm}$$

$$\overline{AD} = 5 + 10 + 5 \Rightarrow \overline{AD} = 20 \text{ cm}$$

Voltando ao cálculo da área:

$$S_{ABCD} = \left(\frac{10 + 20}{2}\right) \cdot 5\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Calculando a área do triângulo equilátero teremos:

$$S_{\Delta ADE} = \frac{\left(\overline{AD}\right)^2 \sqrt{3}}{4}$$

Assim:

$$S_{\Delta ADE} = \frac{(20)^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{\Delta ADE} = \frac{(400)\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\Delta ADE} = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Lembrando que são duas faces pentagonais (inferior e superior) e somando as duas área calculadas anteriormente:

$$S_{Total} = 2(S_{\Delta ADE} + S_{ABCD}) \Rightarrow S_{Total} = 2\left(100\sqrt{3} + 75\sqrt{3}\right)$$

$$S_{Total} = 350\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Além disso, precisamos considerar as laterais da caixa que são formadas por retângulos de base igual às respectivas arestas das faces superior e inferior e altura 5 cm. Assim, chamando os vértices da base inferior de A', B', C', D' e E'. Teremos a soma:

$$S_{Lateral} = S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} + S_{CC'D'D} + S_{DD'E'E} + S_{EE'A'A}$$

Note que algumas áreas são iguais, o que reduz nosso cálculo e nos dá:

$$S_{Lateral} = 3 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot (20) \cdot 5 \Rightarrow S_{Lateral} = 350 \text{ cm}^2$$

Finalmente, somando a área das faces superior e inferior com a área lateral temos:

$$S = 350 + 350\sqrt{3} \Rightarrow S = 350\left(1+\sqrt{3}\right)\ \text{cm}^2$$

O custo de confecção da caixa é de R$ 10,00 por m^2. Logo será de R$ 10,00 para cada 10.000 cm^2.
Fazendo uma regra de três simples e direta:

$$\frac{10}{x} = \frac{10000}{350\left(1+\sqrt{3}\right)}$$

$$x = \frac{350\left(1+\sqrt{3}\right)}{1000} \Rightarrow x \cong 0,95$$

Portanto o custo de confecção da caixa é aproximadamente R$ 0,95.

Opção B

Questão 34

Uma fábrica produz sucos com os seguintes sabores: uva, pêssego e laranja. Considere uma caixa com 12 garrafas desses sucos, sendo 4 garrafas de cada sabor. Retirando-se, ao acaso, 2 garrafas dessa caixa, a probabilidade de que ambas contenham suco com o mesmo sabor equivale a:

(A) 9,1% (B) 18,2% (C) 27,3% (D) 36,4%

Solução 1:
Como os eventos são independentes podemos fazer:

$$P = 3 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \Rightarrow P = \frac{3}{11} \Rightarrow P \cong 0,2727$$

$$P \cong 27,3\%$$

Solução 2:
O número de possibilidades de retirada de 2 garrafas de suco quaisquer pode ser calculado como:

$$C_{12,2} = \frac{12!}{10!2!}$$

$$C_{12,2} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!2!} \Rightarrow C_{12,2} = 66$$

Para duas garrafas de sucos de sabores iguais temos:

$$T = 3 \cdot C_{4,2} \Rightarrow T = 3 \cdot \frac{4!}{2!2!} \Rightarrow T = 18$$

Assim a probabilidade de escolher duas garrafas de mesmo sabor será:

$$P = \frac{18}{66} \Rightarrow P = \frac{3}{11}$$

Opção C

Questão 37

Para melhor estudar o Sol, os astrônomos utilizam filtros de luz em seus instrumentos de observação. Admita um filtro que deixe passar $\frac{4}{5}$ da intensidade da luz que nele incide. Para reduzir essa intensidade a menos de 10% da original, foi necessário utilizar n filtros. Considerando log 2 = 0,301, o menor valor de n é igual a:

(A) 9 (B) 10 (C)11 (D) 12

Solução:
Esquematizando os dados do problema temos:

$$1\text{ Filtro} \text{ ——— } \frac{4}{5}\text{ da intensidade}$$

$$2\text{ Filtros} \text{ ——— } \left(\frac{4}{5}\right)^2\text{ da intensidade}$$

$$\vdots$$

$$\text{n Filtros} \text{ ——— } \left(\frac{4}{5}\right)^n\text{ da intensidade}$$

Assim, a inequação que precisamos resolver é:

$$\frac{1}{10}I_0 > \left(\frac{4}{5}\right)^n I_0$$

Onde I_0 é a intensidade original de luz. Daí:

$$\frac{1}{10} > \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\log\frac{1}{10} > \log\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$-1 > n(\log 4 - \log 5)$$

$$-1 > n\left(2\log 2 - \log\frac{10}{2}\right)$$

$$-1 > n\left[2\cdot 0,301 - (1 - 0,301)\right]$$

$$-n[3\cdot 0,301 - 1] > 1 \Rightarrow n(1 - 0,903) > 1$$

$$n > \frac{1}{1 - 0,903} \Rightarrow n > 10,3$$

$$n = 11$$

Opção C

Questão 40

Observe as guias para pagamento em cota única do IPTU-2010 mostradas abaixo.

Em uma delas, com o desconto de 15%, será pago o valor de R$ 1.530,00; na outra, com o desconto de 7%, será pago o valor de R$ 2.790,00. O desconto percentual médio total obtido com o pagamento desses valores é igual a:

(A) 6% (B) 10% (C) 11% (D) 22%

Solução:
Do enunciado, temos que, da guia da esquerda, serão pagos 85%, pois há um desconto de 15%. Logo, sendo x o valor total, tem-se:

$$0,85x = 1530 \Rightarrow x = \frac{1530}{0,85}$$

Analogamente, sendo y o valor total da guia da direita:

$$0,93y = 2790 \Rightarrow y = \frac{2790}{0,93}$$

O valor que seria pago sem desconto é dado pela expressão:

$$x + y = \frac{1530}{0,85} + \frac{2790}{0,93}$$

Chamando de D o valor total com desconto o desconto médio total (DMT) pode ser calculado como:

$$DMT = \frac{(x+y) - D}{(x+y)}$$

Substituindo os valores:

$$DMT = \frac{\frac{1530}{0,85} + \frac{2790}{0,93} - (1530 + 2790)}{\frac{1530}{0,85} + \frac{2790}{0,93}}$$

$$DMT = \frac{1530 \cdot 0,93 + 2790 \cdot 0,85 - 4320 \cdot 0,85 \cdot 0,93}{1530 \cdot 0,93 + 2790 \cdot 0,85}$$

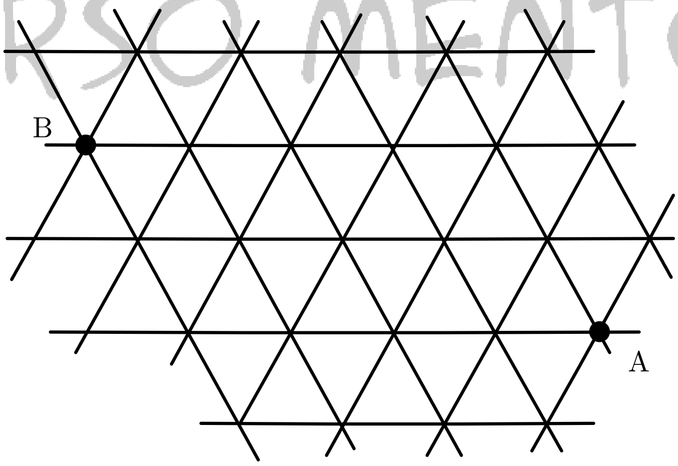
$$DMT = \frac{1422,90 + 2371,50 - 3414,96}{1422,90 + 2371,50}$$

$$DMT = \frac{379,44}{3794,40} \Rightarrow DMT = \frac{1}{10} \Rightarrow DMT = 10\%$$

Opção B

Questão 41

Uma rede é formada de triângulos equiláteros congruentes, conforme a representação abaixo.

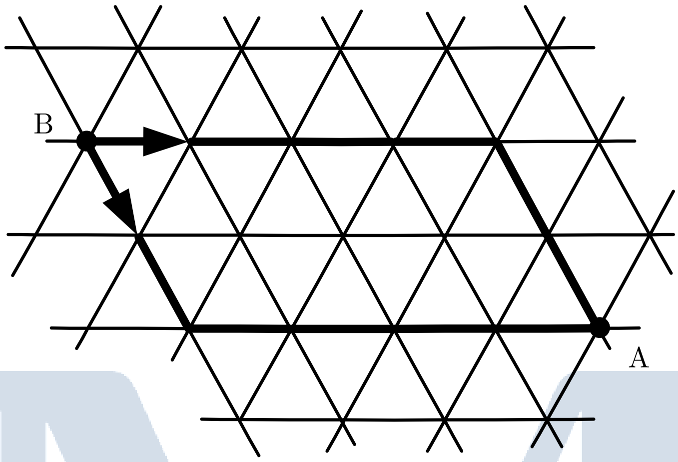


Uma formiga se desloca do ponto A para o ponto B sobre os lados dos triângulos, percorrendo X caminhos distintos, cujos comprimentos totais são todos iguais a d. Sabendo que d corresponde ao menor valor possível para os comprimentos desses caminhos, X equivale a:

(A) 20 (B) 15 (C) 12 (D) 10

Solução:
Partindo da figura definimos:

B_A — Deslocamento para baixo
F — Deslocamento para frente



Como o caminho deve ser mínimo (veja a figura acima) a solução será a permutação com repetição dos elementos abaixo:

$$B_A B_A FFFF$$

O que nos dá 6 movimentos apenas, ou seja, dois movimentos para baixo e quatro movimentos para frente.
Portanto:

$$T = \frac{P_6}{P_4 \cdot P_2}$$

$$T = \frac{6!}{4!2!} \Rightarrow T = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} \Rightarrow T = 15 \text{ caminhos}$$

Opção B

Vestibular 2010

2º Exame de Qualificação 2010

Questão 29

Uma pessoa submetida a uma determinada dieta alimentar deseja ingerir, no máximo, 500 kcal em fatias de uma torta.
Observe que:

- Valor calórico é a quantidade de energia capaz de produzir trabalho, liberada pelo metabolismo de uma certa quantidade de alimento ingerido;
- Os valores calóricos aproximados de carboidratos, lipídios e proteínas são, respectivamente, 4, 9 e 4 kcal/g;
- A torta contém, ao todo, 50% de carboidratos, 15% de lipídios e 35% de proteínas;
- Cada fatia da torta tem massa de 50 g e todas são iguais e homogêneas.

Para obedecer à dieta, a maior quantidade de fatias dessa torta que a pessoa pode comer corresponde a:

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

Solução:
As fatias da torta mantêm a mesma proporção em relação à torta inteira, ou seja, cada fatia conterá 50% de carboidratos, 15% de lipídios e 35% de proteínas. Como cada fatia tem 50 g as quantidades serão:

$$50\times\frac{50}{100}=25\text{ g}\rightarrow\text{ Carboidratos}$$
$$50\times\frac{15}{100}=7,5\text{ g}\rightarrow\text{ Lipídios}$$
$$50\times\frac{35}{100}=17,5\text{ g}\rightarrow\text{ Proteínas}$$

Agora que sabemos quantos gramas há em cada fatia, podemos calcular o valor calórico de cada uma:

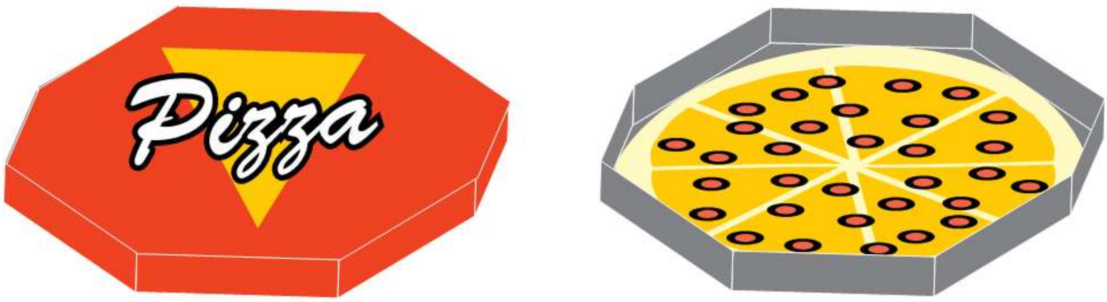
$$\text{Carboidratos: } 4\times 25=100\text{ kcal}$$
$$\text{Lipídios: } 9\times 7,5=67,5\text{ kcal}$$
$$\text{Proteínas: } 4\times 17,5=70\text{ kcal}$$

Somando teremos o valor calórico da fatia: $100+67,5+70=237,5\text{ kcal}$. Como a dieta é de no máximo 500 kcal a pessoa só poderá comer duas fatias (475 kcal).

Opção B

Questão 35

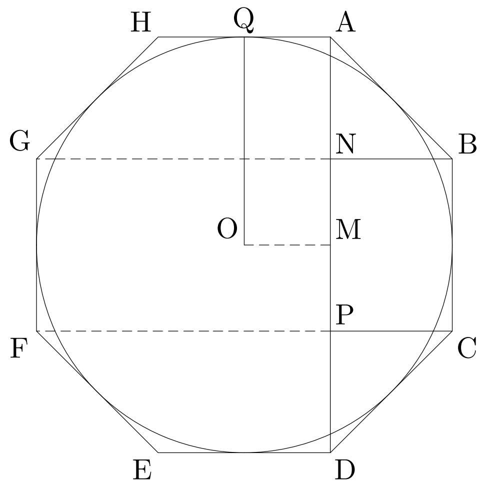
Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma pizza circular que tangencia as faces do prisma.



Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

(A) $2\sqrt{2}$ (B) $3\frac{\sqrt{2}}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (D) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Solução:
Olhando a caixa da pizza por cima teremos a seguinte figura:



Seja O o centro do octógono e da pizza. Os triângulos retângulos isósceles AND e CDP são congruentes e $AB = CD = a$. Portanto, $AN = PD$ e:

$$(AB)^2 = 2(AN)^2$$

$$AN = \frac{AB}{\sqrt{2}}$$

O segmento AD então é

$$AD = AN + NP + PD$$

$$AD = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} + a$$

Note que OQ é igual a metade de AD, logo

$$OQ = \frac{AD}{2} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{2}} + a}{2}$$

$$OQ = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{2}$$

$$OQ = \frac{a\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$$

Daí

$$\frac{OQ}{a} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

Opção C

Questão 37

Uma bola de boliche de 2 kg foi arremessada em uma pista plana. A tabela abaixo registra a velocidade e a energia cinética da bola ao passar por três pontos dessa pista: A, B e C.

Pontos	Velocidade (m/s)	Energia Cinética (J)
A	V_1	E_1
B	V_2	E_2
C	V_3	E_3

Se (E_1, E_2, E_3) é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, a razão da progressão geométrica (V_1, V_2, V_3) está indicada em:

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D) $\frac{1}{2}$

Solução:
A expressão da energia cinética **E** de um corpo de massa **m** e velocidade **v** é:

$$E = \frac{mv^2}{2}$$

Como $m = 2\text{ kg}$ teremos

$$E = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow E = v^2$$

Então a P.G. (E_1, E_2, E_3) pode ser escrita como

$$\left((V_1)^2, (V_2)^2, (V_3)^2\right)$$

Como a razão desta progressão é $\frac{1}{2}$ temos que:

$$\frac{(V_3)^2}{(V_2)^2} = \frac{(V_2)^2}{(V_1)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Opção C

Questão 38

Ao refazer seu calendário escolar para o segundo semestre, uma escola decidiu repor algumas aulas em exatamente 4 dos 9 sábados disponíveis nos meses de outubro e novembro de 2009, com a condição de que não fossem utilizados 4 sábados consecutivos.
Para atender às condições de reposição das aulas, o número total de conjuntos distintos que podem ser formados contendo 4 sábados é de:

(A) 80 (B) 96 (C) 120 (D) 126

Solução:
Queremos escolher 4 dentre 9 sábados disponíveis com a condição de que não sejam consecutivos. Torna-se mais fácil calcular quantas são as maneiras de termos 4 sábados consecutivos e subtrair do total de possibilidades.
Para escolher 4 entre 9 sábados:

$$C_{9,4} = \frac{9!}{4!(9-4)!}$$

$$C_{9,4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} \Rightarrow C_{9,4} = 3 \cdot 7 \cdot 6 \Rightarrow C_{9,4} = 126$$

Chamando de S os sábados com aula e N os sábados não utilizados, as maneiras de termos 4 sábados consecutivos são

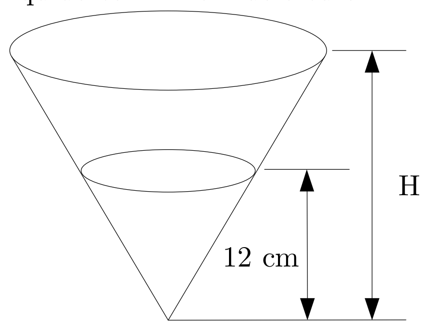
SSSSNNNNN
NSSSSNNNN
NNSSSSNNN
NNNSSSSNN
NNNNSSSSN
NNNNNSSSS

Portanto, teremos um total de $126 - 6 = 120$ maneiras de ocupar os 4 sábados sem que sejam todos consecutivos.

Opção C

Questão 39

A figura abaixo representa um recipiente cônico com solução aquosa de hipoclorito de sódio a 27%. O nível desse líquido tem 12 cm de altura.



Para o preparo de um desinfetante, diluiu-se a solução inicial com água, até completar o recipiente, obtendo-se a solução aquosa do hipoclorito de sódio a 8%.
Esse recipiente tem altura H, em centímetros, equivalente a:

(A) 16 (B) 18 (C) 20 (D) 22

Solução:
A concentração da solução aquosa é de 27%, queremos que ela passe a ser de 8%. Sendo assim, seja v o volume total de solução; a concentração de hipoclorito de sódio em relação ao total é:

$$C = \frac{0,27v}{v}$$

O que quer dizer que para cada litro de solução temos 270 ml de hipoclorito de sódio. Queremos adicionar x litros de água para que 8% do total correspondam a hipoclorito de sódio. Então a nova concentração será

$$\frac{0,27v}{v+x} = \frac{8}{100}$$

Solucionando esta equação:

$$27v = 8v + 8x$$
$$8x = 19v$$
$$x = 2,375v$$

O volume final passou a ser:

$$V = v + 2,375v \Rightarrow V = 3,375v$$

A relação entre os volumes inicial e final e as respectivas alturas é

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{12}{H}\right)^3$$

Substituindo os valores encontrados

$$\frac{v}{3,375v} = \left(\frac{12}{H}\right)^3$$

Fatorando 3375 teremos

$$\frac{1}{\frac{\left(3^3 \cdot 5^3\right)}{1000}} = \left(\frac{12}{H}\right)^3$$

Daí

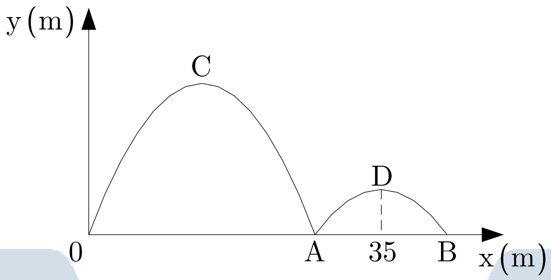
$$\sqrt[3]{\frac{1000}{15^3}} = \frac{12}{H}$$

$$H = \frac{12 \cdot 15}{10}$$
$$H = 18 \text{ cm}$$

Opção B

Questão 40

Uma bola de beisebol é lançada de um ponto 0 e, em seguida, toca o solo nos pontos A e B, conforme representado no sistema de eixos ortogonais:



Durante sua trajetória, a bola descreve duas parábolas com vértices C e D.

A equação de uma dessas parábolas é $y = -\frac{x^2}{75} + \frac{2x}{5}$.

Se a abscissa de D é 35 m, a distância do ponto 0 ao ponto B, em metros, é igual a:

(A) 38 (B) 40 (C) 45 (D) 50

Solução:

Vamos calcular as raízes da parábola $y = -\frac{x^2}{75} + \frac{2x}{5}$:

$$-\frac{x^2}{75} + \frac{2x}{5} = 0$$
$$\frac{x}{5}\left(-\frac{x}{15} + 2\right) = 0$$

Então

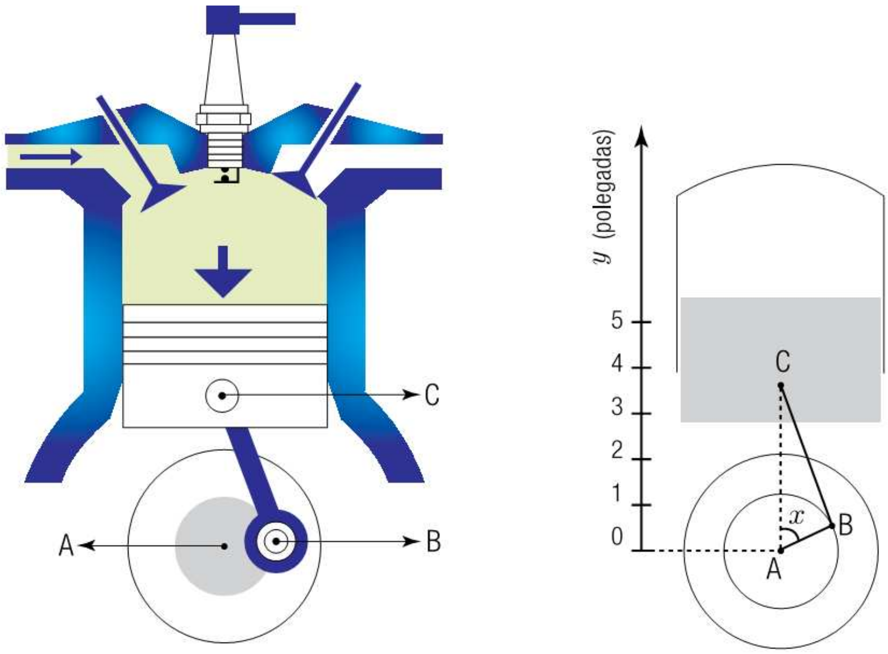
$$\frac{x}{5} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } -\frac{x}{15} = -2 \Rightarrow x = 30$$

Concluímos, portanto que $x = 0$ e $x = 30$ são as raízes da parábola com vértice C. A outra parábola tem a abscissa do vértice $x = 35$. Como a parábola é simétrica em relação ao vértice, em B teremos $x = 40$.
Assim a distância OB vale 40 metros.

Opção B

Questão 41

Observe abaixo a ilustração de um pistão e seu esquema no plano.



O pistão é ligado, por meio da haste BC, a um disco que gira em torno do centro A.
Considere que:

- o raio AB e a haste BC medem, respectivamente, 1 polegada e 4 polegadas;
- à medida que o disco gira, o pistão move-se verticalmente para cima ou para baixo, variando a distância AC e o ângulo $B\hat{A}C$.

Se a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é dada por x radianos, a distância entre A e C, em polegadas, pode ser obtida pela seguinte equação:

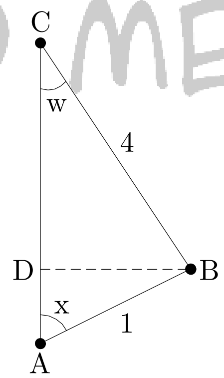
(A) $y = 4 + \operatorname{sen} x$

(B) $y = 4 + \cos x$

(C) $y = \operatorname{sen} x + \sqrt{16 - \cos^2 x}$

(D) $y = \cos x + \sqrt{16 - \operatorname{sen}^2 x}$

Solução:
Na figura abaixo, temos o triângulo ABC e traçamos BD perpendicular a AC:



Fica claro que a distância CA é dada por $AD = CD + DA$. Calculando CD e DA teremos:

$$\cos w = \frac{CD}{4} \Rightarrow CD = 4\cos w$$

$$\cos x = \frac{DA}{1} \Rightarrow DA = \cos x$$

Usando a lei dos senos no triângulo ABC teremos:

$$\frac{1}{\text{senw}} = \frac{4}{\text{senx}}$$

$$\text{senw} = \frac{\text{senx}}{4}$$

Usando a relação $\text{sen}^2 w + \cos^2 w = 1 \Rightarrow \cos w = \sqrt{1 - \text{sen}^2 w}$ e calculando CA:

$$CA = 4\cos w + \cos x$$

$$CA = 4\sqrt{1 - \text{sen}^2 w} + \cos x$$

$$CA = 4\sqrt{1 - \left(\frac{\text{senx}}{4}\right)^2} + \cos x$$

$$CA = 4\sqrt{\frac{16 - \text{sen}^2 x}{16}} + \cos x$$

$$CA = \sqrt{16 - \text{sen}^2 x} + \cos x$$

Opção D

Vestibular 2009

2º Exame de Qualificação 2009

Questão 23

Um estudante possui dez figurinhas, cada uma com o escudo de um único time de futebol, distribuídas de acordo com a tabela:

Time/escudo	Quantidade de figurinhas idênticas
A	3
B	2
C	1
D	1
E	1
F	1
G	1

Para presentear um colega, o estudante deseja formar um conjunto com cinco dessas figurinhas, atendendo, simultaneamente, aos seguintes critérios:
— duas figurinhas deverão ter o mesmo escudo;
— três figurinhas deverão ter escudos diferentes entre si e também das outras duas.
De acordo com esses critérios, o número máximo de conjuntos distintos entre si que podem ser formados é igual a:

(A) 32 (B) 40 (C) 56 (D) 72

Solução:
Para escolher duas figurinhas com o mesmo escudo o amigo só poderá escolher do time **A** ou do time **B**, uma vez que só desses times é que o estudante possui mais de uma figurinha. Além disso, vamos considerar as figurinhas do time A (ou B) idênticas entre si. Então, temos então as opções:
1) 2 figurinhas do **time A**, **1** do **time B** e 2 escolhidas entre os outros 5 times:

$$T_1 = C_{3,2} \cdot [B_1] \cdot C_{5,2} + C_{3,2} \cdot [B_2] \cdot C_{5,2}$$

Observação: Repare que a escolha de figurinhas do time B deve ser observada, pois os escudos devem ser diferentes, então:

$$T_1 = C_{3,2} \cdot [B_1] \cdot C_{5,2} + C_{3,2} \cdot [B_2] \cdot C_{5,2} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{5!}{2!3!} = 60$$

Esta conta considera as figurinhas do time A diferentes entre si, bem como as do time B. Precisamos então dividir por 6:

$$\frac{T_1}{6} = 10$$

2) 2 figurinhas do **time B**, 1 do **time A** e 3 escolhidas entres os outros 5 times:

$$T_2 = C_{2,2} \cdot [A_1] \cdot C_{5,2} + C_{2,2} \cdot [A_2] \cdot C_{5,2} + C_{2,2} \cdot [A_3] \cdot C_{5,2} = 3 \cdot 10 = 30$$

Esta conta considera as figurinhas do time A diferentes entre si, bem como as do time B. Precisamos então dividir por 3:

$$\frac{T_2}{3} = 10$$

3) 2 figurinhas do **time A** e 3 escolhidas entre os outros 5 times, excluindo-se o **time B**:

$$T_3 = C_{3,2} \cdot C_{5,3}$$
$$T_3 = 3 \cdot 10 = 30$$

Mais uma vez “descontando” as repetições de A:

$$\frac{T_3}{3} = 10$$

4) 2 figurinhas do **time B** e 3 escolhidas entre os outros 5 times, excluindo-se o **time A**:

$$T_4 = C_{2,2} \cdot C_{5,3}$$
$$T_4 = 1 \cdot 10 = 10$$

Somando tudo:

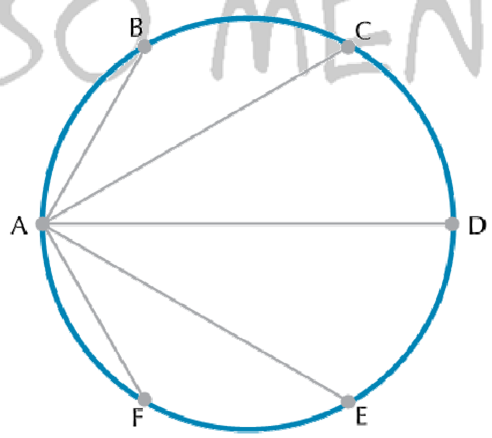
$$T = 10 + 10 + 10 + 10 \Rightarrow T = 40$$

Opção B

Questão 28

Um atleta faz seu treinamento de corrida em uma pista circular que tem 400 metros de diâmetro. Nessa pista, há seis cones de marcação indicados pelas letras A, B, C, D, E e F, que dividem a circunferência em seis arcos, cada um medindo 60 graus.

Observe o esquema:



O atleta partiu do ponto correspondente ao cone A em direção a cada um dos outros cones, sempre correndo em linha reta e retornando ao cone A. Assim, seu percurso correspondeu a ABACADAEAFA.

Considerando, o total de metros percorridos pelo atleta nesse treino foi igual a:

(A) 1480 (B) 2960 (C) 3080 (D) 3120

Solução:

Como o círculo está dividido em 6 arcos de 60° os pontos A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular.

O diâmetro é de 400 metros logo o raio do círculo é de 200 m. O que nos dá:

$$AB = AF = 200 \text{ m}$$

Ligando os pontos C e D temos o triângulo ACD que é retângulo em C. Usando o Teorema de Pitágoras:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$
$$400^2 = AC^2 + 200^2 \Rightarrow AC^2 = 200^2 \cdot 3$$
$$AC = 200\sqrt{3} \text{ m}$$

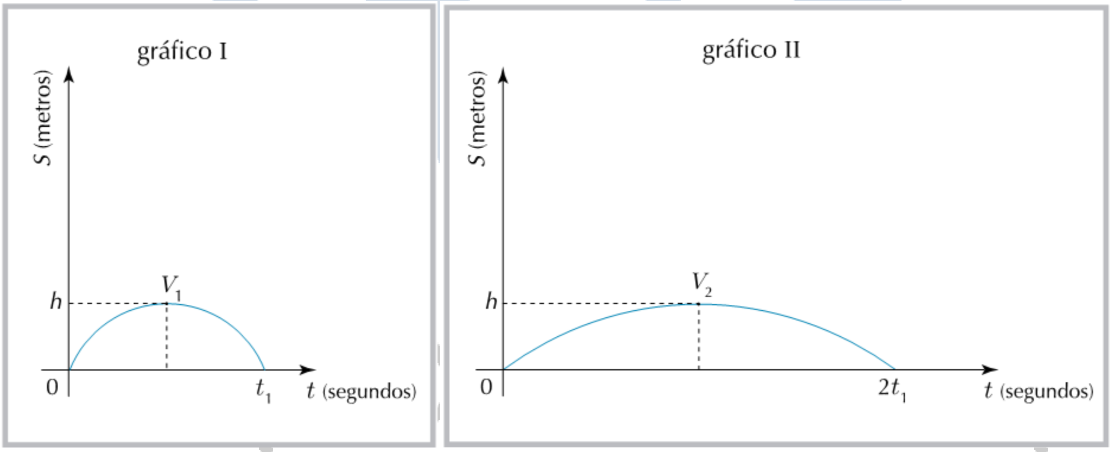
O percurso total tem comprimento:

$$2AB + 2AC + 2AD + 2AE + 2AF =$$
$$= 2\left(200 + 200\sqrt{3} + 400 + 200\sqrt{3} + 200\right)$$
$$= 2\left(800 + 400\sqrt{3}\right)$$
$$= 1600 + 800 \cdot 1,7$$
$$\cong 2960 \text{ m}$$

Opção B

Questão 32

Os gráficos I e II representam as posições S de dois corpos em função do tempo t.



No gráfico I, a função horária é definida pela equação $S = a_1t^2 + b_1t$ e, no gráfico II, por $S = a_2t^2 + b_2t$. Admita que V_1 e V_2 são, respectivamente, os vértices das curvas traçadas nos gráficos I e II.

Assim, a razão $\frac{a_1}{a_2}$ é igual a:

(A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8

Solução:

Podemos escrever cada equação em função de suas raízes:

$$S_I = a_1\left(t - 0\right)\left(t - t_1\right)$$
$$S_{II} = a_2\left(t - 0\right)\left(t - 2t_1\right)$$

As coordenadas de cada vértice são:

$$V_1\left(\frac{t_1}{2},h\right)$$
$$V_2\left(t_1,h\right)$$

Substituindo estas coordenadas nas respectivas equações temos:

$$h=a_1\left(\frac{t_1}{2}\right)\left(\frac{t_1}{2}-t_1\right)\Rightarrow h=-a_1\left(\frac{t_1}{2}\right)^2$$
$$h=a_2\left(t_1\right)\left(t_1-2t_1\right)\Rightarrow h=-a_2\left(t_1\right)^2$$

Dividindo uma equação pela outra:

$$\frac{h}{h}=\frac{-a_1\left(\frac{t_1}{2}\right)^2}{-a_2\left(t_1\right)^2}\Rightarrow\frac{a_1}{a_2}=4$$

Opção C

Questão 40

Em um supermercado, um cliente empurra seu carrinho de compras passando pelos setores 1, 2 e 3, com uma força de módulo constante de 4 newtons, na mesma direção e mesmo sentido dos deslocamentos. Na matriz A abaixo, cada elemento a_{ij} indica, em joules, o trabalho da força que o cliente faz para deslocar o carrinho do setor i para o setor j, sendo i e j elementos do conjunto {1, 2, 3}.

$$A=\begin{bmatrix}0&40&60\\40&0&80\\60&80&0\end{bmatrix}$$

Ao se deslocar do setor 1 ao 2, do setor 2 ao 3 e, por fim, retornar ao setor 1, a trajetória do cliente descreve o perímetro de um triângulo.

Nessas condições, o cliente percorreu, em metros, a distância de:

(A) 35 (B) 40 (C) 45 (D) 50

Solução:

O trabalho de uma força paralela ao seentido do deslocamento é dada pela expressão:

$$W=Fd$$

De **1** para **2**, temos o elemento a_{12} da matriz, calculando d_{12}:

$$d_{12}=\frac{40}{4}\Rightarrow d_{12}=10\text{ m}$$

De **1** para **3**, temos o elemento a_{13} da matriz, calculando d_{13}:

$$d_{13}=\frac{60}{4}\Rightarrow d_{13}=15\text{ m}$$

De **2** para **3**, temos o elemento a_{23} da matriz, calculando d_{23}:

$$d_{23}=\frac{80}{4}\Rightarrow d_{23}=20\text{ m}$$

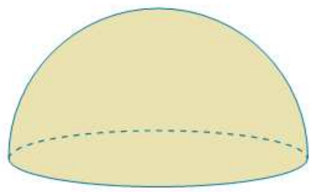
O perímetro do triângulo será então:

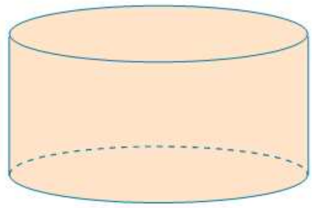
$$10+20+15=45\text{ m}$$

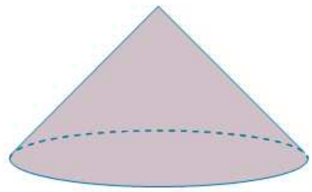
Opção C

Questão 41

Nas ilustrações abaixo, estão representados três sólidos de bases circulares, todos com raios iguais e mesma altura. Considere as medidas dos raios iguais às medidas das alturas, em centímetros.


semi-esfera


cilindro circular reto


cone circular reto

As massas específicas de quatro substâncias, três das quais foram empregadas na construção desses sólidos, estão indicadas na tabela:

substâncias	Massa específica $\left(g \cdot cm^{-3}\right)$
w	2
x	3
y	4
z	6

Admita que os sólidos tenham a mesma massa e que cada um tenha sido construído com apenas uma dessas substâncias.
De acordo com esses dados, o cone circular reto foi construído com a seguinte substância:

(A) w (B) x (C) y (D) z

Solução:
Sabemos que a densidade (nesse caso igual à massa específica) se relaciona com o volume através da expressão:

$$d = \frac{m}{V}$$

Vamos calcular os volumes do sólidos:
Semi-esfera:

$$V_{se} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{2} \Rightarrow V_{se} = \frac{2}{3}\pi r^3$$

Cilindro:

$$V_c = \pi r^2 \cdot r \Rightarrow V_c = \pi r^3$$

Cone:

$$V_{co} = \frac{\pi r^2 \cdot r}{3} \Rightarrow V_{co} = \frac{1}{3}\pi r^3$$

Como todas as massas são iguais, quanto **maior o volume**, **menor a massa específica**, portanto, colocando em ordem **crescente** de massa específica teremos **cilindro**, **semi-esfera** e **cone**.
Igualando as massas teremos:

$$d_{se}V_{se} = d_{co}V_{co} = d_cV_c$$

Substituindo os volumes:

$$d_{se} \cdot \frac{2}{3} = d_{co} \cdot \frac{1}{3} = d_c$$

O que nos dá:

$$2d_{se} = d_{co} = 3d_c$$

A massa específica do cone deve ser a maior de todas, ou seja:

Hipótese 1: $d_{co} = 6$:

Teremos:

$$\begin{cases} d_{se} = 3 \\ d_c = 2 \end{cases}$$

Hipótese 2: $d_{co} = 4$:

Teremos:

$$\begin{cases} d_{se} = 2 \\ d_c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Observando a tabela dada, vemos que só a hipótese 1 é válida. A massa específica igual a 2 é da substância w.

Opção A

Questão 42

Muitas jóias são constituídas por ligas feitas de uma mistura de ouro puro com outros metais.

Uma jóia é considerada de ouro n quilates se $\frac{n}{24}$ de sua massa for de ouro, sendo n um número inteiro, maior ou igual a 1 e menor ou igual a 24.

Uma aliança de ouro 15 quilates tem massa igual a 4 g.

Para transformar essa aliança em outra, de ouro 18 quilates, mantendo a quantidade dos outros metais, é necessário acrescentar, em sua liga, uma quantidade de gramas de ouro puro equivalente a:

(A) 1,0 (B) 1,5 (C) 2,0 (D) 3,0

Solução:

Por definião, uma aliança será de 18 quilates se $\frac{18}{24}$ de sua massa for de ouro, sendo $1 \le n \le 18$, com $n \in \mathbb{N}$. Então, inicialmente a aliança era de 15 quilates:

$$\frac{15}{24} \cdot 4 = m$$

Onde m é a massa de ouro inicial. Calculando m:

$$m = 2,5 \text{ g}$$

Para que a aliança seja de 18 quilates:

$$\frac{18}{24} \cdot (4 + x) = 2,5 + x$$

Onde x é a massa de ouro puro adicionada. Calculando x:

$$\frac{3}{4} \cdot (4 + x) = 2,5 + x$$

$$12 + 3x = 10 + 4x$$

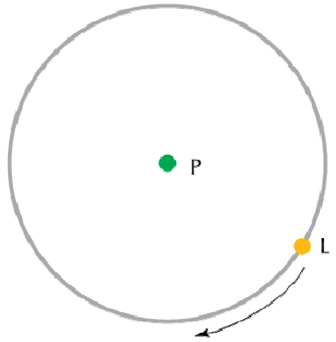
$$x = 2 \text{ g}$$

Opção C

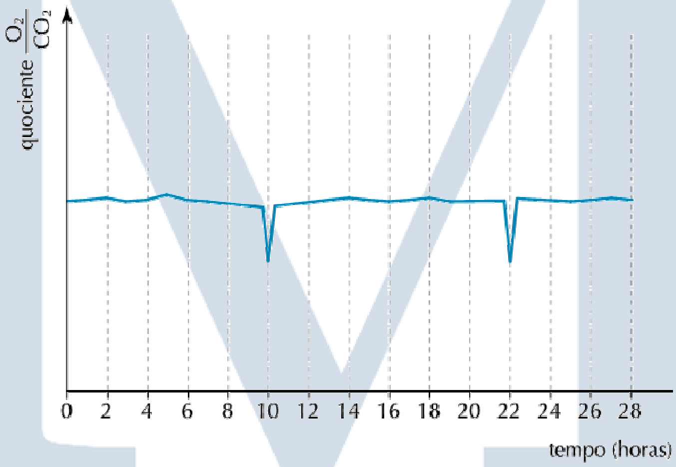
Questão 43

Uma pequena planta é colocada no centro P de um círculo, em um ambiente cuja única iluminação é feita por uma lâmpada L. A lâmpada é mantida sempre acesa e percorre o

perímetro desse círculo, no sentido horário, em velocidade constante, retornando a um mesmo ponto a cada período de 12 horas.
Observe o esquema:



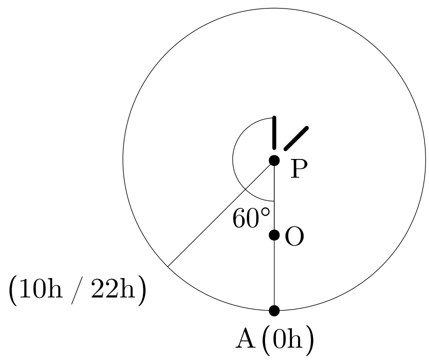
No interior desse círculo, em um ponto O, há um obstáculo que projeta sua sombra sobre a planta nos momentos em que P, O e L estão alinhados, e o ponto O está entre P e L.
Nessas condições, mediu-se, continuamente, o quociente entre as taxas de emissão de O_2 e de CO_2 da planta. Os resultados do experimento estão mostrados no gráfico, no qual a hora zero corresponde ao momento em que a lâmpada passa por um ponto A.



As medidas, em graus, dos ângulos formados entre as retas AP e PO são aproximadamente iguais a:

(A) 20 e 160 (B) 30 e 150 (C) 60 e 120 (D) 90 e 90

Solução:
Através do gráfico notamos que a planta fica "na sombra" às 10 e às 22 horas. A lâmpada leva 12 horas para completar 360°; o que quer dizer que ela percorre 30° a cada hora. Logo, entre o ponto A e a primeira "sombra" há um arco de 60°. Veja a figura:



Fica claro que os ângulos são 60° e 120°.

Opção C