Curso Mentor

Soluções das Questões de Matemática do Processo Seletivo de Admissão à Escola Preparatória de Cadetes do Exército — EsPCEx

Concurso 2009

Questão 1

Sabendo-se que $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \ldots + \log x^{199} = 10000$, podemos afirmar que x pertence ao intervalo

(A) $[1,3]$ (B) $[3,5]$ (C) $[5,7]$ (D) $[7,9]$ (E) $[9,11]$

Solução:

Sabemos que os logaritmos possuem a seguinte propriedade:

$$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

Aplicando esta propriedade teremos:

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \ldots + \log x^{199} = 10000$$

$$\log\left(x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{199}\right) = 10000$$

$$\log x^{1+3+5+\ldots+199} = 10000$$

A soma $1+3+5+\ldots+199$ trata-se da soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 2. Calculando o número de termos teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 199 = 1 + (n-1)\cdot 2$$

$$n = \frac{198}{2} + 1$$

$$n = 100$$

Assim, queremos calcular a soma de 100 termos desta P.A. Como sabemos que a soma dos n termos de uma P.A. é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Teremos então:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})\cdot 100}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(1+199)\cdot 100}{2}$$

Portanto:

$$S_{100} = 10000$$

Voltando à nossa expressão original:

$$\log x^{1+3+5+\ldots+199} = 10000 \Rightarrow \log x^{10000} = 10000$$

Aplicaremos agora, outra propriedade dos logaritmos:

$$\log_b a^c = c\log_b a$$

Então:

$$10000 \log x = 10000$$
$$\log x = 1$$
$$x = 10$$

Opção E

Questão 2

Considere a função real $g(x)$ definida por:

$$\begin{cases} 5^x, \text{ se } x \leq 1 \\ -\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{17}{4}, \text{ se } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

O valor de $g(g(g(1)))$ é

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução:

Como a questão pede o valor de $g(g(g(1)))$, vamos calcular cada valor sem precisar fazer a composta das funções. Para $x = 1$ usamos a primeira expressão de g:

$$g(1) = 5^1 \Rightarrow g(1) = 5$$

Agora devemos calcular $g(g(5))$. Para $x = 5$ usamos a terceira expressão:

$$g(5) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow g(5) = 3$$

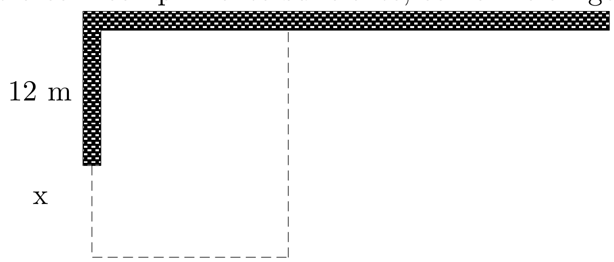
Agora queremos $g(3)$, fazemos uso agora da segunda expressão:

$$g(3) = -\frac{3 \cdot 9}{4} + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{17}{4}$$
$$g(3) = \frac{-27 + 18 + 17}{4}$$
$$g(3) = 2$$

Opção C

Questão 3

Um agricultor, que dispõe de 60 metros de tela, deseja cercar uma área retangular, aproveitando-se de dois trechos de muro, sendo um deles com 12 metros de comprimento e o outro com comprimento suficiente, conforme a figura abaixo.



Sabendo que ele pretende usar exatamente os 60 metros de tela, pode-se afirmar que a expressão que representa a área cercada y, em função da dimensão x indicada na figura, e o valor da área máxima que se pode obter nessas condições são, respectivamente, iguais a

(A) $y = -2x^2 + 24x + 576$ e $648\ m^2$

(B) $y = -2x^2 - 24x + 476$ e $548\ m^2$

(C) $y = -x^2 + 36x + 576$ e $900\ m^2$

(D) $y = -2x^2 + 12x + 436$ e $454\ m^2$

(E) $y = -x^2 + 12x + 288$ e $288\ m^2$

Solução:

Os lados da área triangular são expressos por $12 + x$ e z. Desta forma a área retangular possui a seguinte expressão:

$$y = (12 + x)z$$

Como sabemos que o comprimento da tela é de 60 metros, podemos escrever:

$$x + z + 12 + x = 60$$

O que nos dá

$$z = 48 - 2x$$

Substituindo a segunda equação na primeira

$$y = (12 + x)(48 - 2x)$$

Desenvolvendo

$$y = 576 - 24x + 48x - 2x^2$$

$$y = 576 + 24x - 2x^2$$

Como esta expressão representa uma parábola com concavidade para baixo, seu máximo vale

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$

Onde y_v representa a ordenada do vértice, logo:

$$y_v = -\frac{\left(24^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 576\right)}{4 \cdot (-2)}$$

$$y_v = \frac{576(1 + 8)}{8}$$

$$y_v = 648$$

A área máxima será, portanto, $648\ m^2$.

Opção A

Questão 4

Dada a função real modular $f(x) = 8 + \left(|4k - 3| - 7\right)x$, em que k é real. Todos os valores de k para que a função dada seja decrescente pertencem ao conjunto

(A) $k > 2,5$

(B) $k < -1$

(C) $-2,5 < k < -1$

(D) $-1 < k < 2,5$

(E) $k < -1$ ou $k > 2,5$

Solução:

Para que uma função do tipo $f(x) = ax + b$ seja crescente devemos ter $a > 0$. Portanto, da função dada:

$$|4k - 3| - 7 > 0$$
$$|4k - 3| > 7$$

Então, há duas hipóteses a considerar:

1) $4k - 3 > 7$
$4k > 10$
$k > 2,5$

ou

2) $4k - 3 < -7$
$4k < -4$
$k < -1$

Opção E

Questão 5

Um dos modelos matemáticos de crescimento populacional é conhecido como "Modelo Malthusiano" (Thomas Malthus, 1766-1834). Neste modelo, a evolução de uma população é dada pela função

$$P(t) = P_0 \cdot K^t$$

em que P_0 é a população inicial, k indica a taxa de crescimento (considerada constante e não negativa neste modelo) e t é o tempo decorrido. Um biólogo que estudava uma cultura de bactérias observou que, oito horas após o início do experimento, a população era de 8000 indivíduos e que, duas horas depois dessa observação, a população era de 16000 indivíduos. Podemos afirmar que a população inicial era de

(A) 250 (B) 500 (C) 512 (D) 1000 (E) 1024

Solução:

O enunciado nos dá que

$$P(8) = P_0 \cdot K^8 \Rightarrow P_0 \cdot K^8 = 8000$$

E que

$$P(10) = P_0 \cdot K^{10} \Rightarrow P_0 \cdot K^{10} = 16000$$

Dividindo uma expressão pela outra teremos

$$\frac{K^{10}}{K^8} = \frac{16000}{8000} \Rightarrow K^2 = 2 \Rightarrow K = \pm\sqrt{2} \Rightarrow K = \sqrt{2}$$

Lembrar, do enunciado, que K é uma **constante positiva**. Voltando a uma das equações:

$$P_0 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8 = 8000$$

$$P_0 = \frac{8000}{16} \Rightarrow P_0 = 500$$

Opção B

Questão 6

O valor de x na equação exponencial $7^{2x-1} - 7^x - 7^{x-1} = 0$ é:

(A) $\frac{2\log 2}{\log 7}$ (B) $\frac{3\log 3}{\log 7}$ (C) $\frac{2\log 3}{\log 7}$ (D) $\frac{3\log 2}{\log 7}$ (E) $\frac{3\log 8}{\log 7}$

Solução:

Podemos reescrever a equação como:

$$\left(7^x\right)^2 \cdot 7^{-1} - 7^x - 7^x \cdot 7^{-1} = 0$$

Chamando $7^x = y$ teremos:

$$\frac{y^2}{7} - y - \frac{y}{7} = 0$$

$$\frac{y^2 - 8y}{7} = 0 \Rightarrow y^2 - 8y = 0$$

$$y\left(y - 8\right) = 0$$

Temos agora duas soluções:

$$y\left(y-8\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow 7^x = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \\ y = 8 \Rightarrow 7^x = 8 \Rightarrow \log_7 8 = x \end{cases}$$

Fazendo uma mudança de base para base 10 na segunda solução:

$$\log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \Rightarrow \log_7 8 = \frac{\log 2^3}{\log 7} \Rightarrow \log_7 8 = \frac{3\log 2}{\log 7}$$

Opção D

Questão 7

Dentre as várias formas de se medir temperatura, destacam-se a escala Celsius, adotada no Brasil, e a escala Fahrenheit, adotada em outros países. Para a conversão correta de valores de temperaturas entre essas escalas, deve-se lembrar que 0 grau, na escala Celsius, corresponde a 32 graus na escala Fahrenheit e que 100 graus, na escala Celsius, correspondem a 212 graus na escala Fahrenheit.

Para se obter um *valor aproximado* da temperatura, na escala Celsius, correspondente a uma temperatura conhecida na escala Fahrenheit, existe ainda uma regra prática definida por:

"divida o valor da temperatura em Fahrenheit por 2 e subtraia 15 do resultado."

A partir dessas informações, pode-se concluir que o valor da temperatura, na escala Celsius, para o qual a regra prática fornece o *valor correto* na conversão é

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

Solução:

Sabemos que a regra correta de conversão entre as escalas Celsius e Fahrenheit é dada pela expressão:

$$\frac{t_C}{5} = \frac{t_F - 32}{9}$$

A expressão para o valor aproximado é

$$t_C = \frac{t_F}{2} - 15$$

Como queremos que os valores aproximado e correto sejam iguais para a temperatura em Celsius, devemos ter:

$$\frac{5\left(t_F - 32\right)}{9} = \frac{t_F}{2} - 15$$

$$10t_F - 320 = 9t_F - 270$$

$$t_F = 50$$

Substituindo em uma das expressões

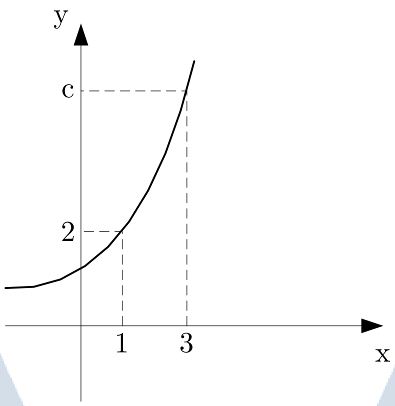
$$t_C = \frac{50}{2} - 15$$

$$t_C = 10$$

Opção A

Questão 8

O gráfico abaixo representa a função $y = a^x$. A partir dos dados fornecidos, pode-se concluir que o valor de $\log_a c + \log_c a$ é igual a



(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $\frac{17}{4}$ (D) zero (E) 2

Solução:

Como o gráfico representa a função $y = a^x$ podemos substituir o ponto $(1, 2)$:

$$y = a^x \Rightarrow 2 = a^1 \Rightarrow a = 2$$

Usando o ponto $(3, c)$:

$$y = 2^x \Rightarrow c = 2^3 \Rightarrow c = 8$$

Calculando $\log_a c + \log_c a$:

$$\log_a c + \log_c a = \log_2 8 + \log_8 2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Opção B

Questão 9

O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solução:

Queremos solucionar a seguinte equação:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Teremos então:

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ ou } \ \cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Solucionando cada uma:

$$\textbf{1)}\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$k = 0 \to x = \frac{\pi}{3} + 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \to x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3}$$

$$k = 2 \to x = \frac{\pi}{3} + 4\pi \Rightarrow x = \frac{13\pi}{3}\text{, está fora do intervalo } \left[0, \frac{19\pi}{6}\right].$$

$$\textbf{2)}\ \cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

$$x = \cos\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$k = 0 \to x = \frac{5\pi}{3} + 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

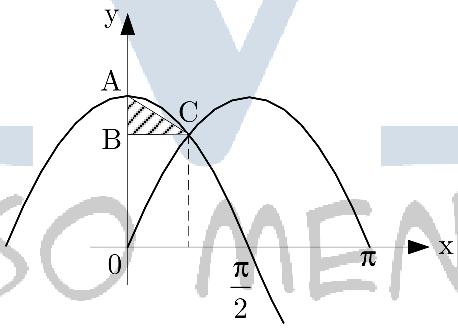
$$k = 1 \to x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{3}\text{, está fora do intervalo } \left[0, \frac{19\pi}{6}\right].$$

As soluções válidas são $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Opção C

Questão 10

As funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ estão representadas no gráfico abaixo. Então, a medida da área do triângulo retângulo definido pelos segmentos retilíneos AB, BC e AC é:



(A) $\frac{\pi}{8}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

(B) $\frac{\pi}{8}$

(C) $\frac{\pi}{16}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

(D) $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$

(E) $\frac{\pi}{16}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Solução:

O ponto C do triângulo tem suas coordenadas definidas pela solução da equação $\mathrm{sen}x = \cos x$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solucionando a equação

$$\mathrm{sen}x = \cos x \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}x = 1$$

$$\mathrm{tg}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Testando os valores de k:

$$k = 0 \to x = \frac{\pi}{4} \pm 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \to x = \frac{\pi}{4} \pm \pi \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} - \pi \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

A única solução dentro do intervalo é $\frac{\pi}{4}$. Como $\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ as coordenadas do ponto C são $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como o ponto B corresponde à amplitude máxima do cosseno de x, as coordenadas do ponto B são $(0,1)$. Assim teremos a área do triângulo dada por:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2}$$

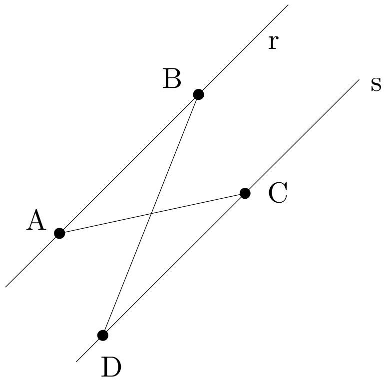
Opção A

Questão 11

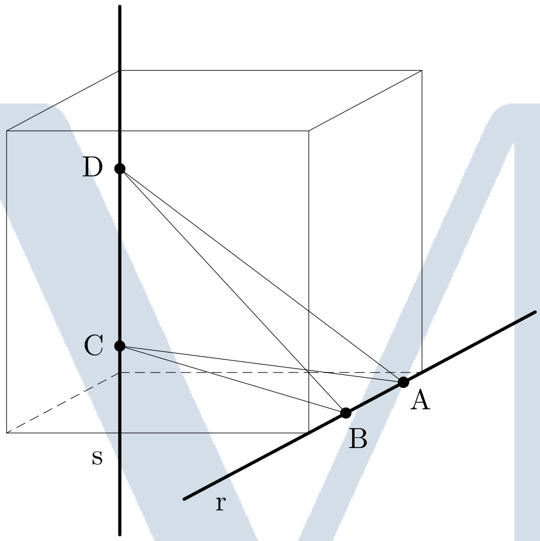
Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

I – Se as retas AC e BD são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.
II – Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.
III – Se AC e BD forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.
Pode-se concluir que
Dentre as afirmações abaixo
(A) somente a I é verdadeira.
(B) somente a II é verdadeira.
(C) somente a III é verdadeira.
(D) as afirmações II e III são verdadeiras.
(E) as afirmações I e III são verdadeiras.

Solução:
Analisemos cada afirmativa em separado:
I – **Falsa.** Basta o contra-exemplo em que $r \parallel s$ e teremos a figura abaixo:



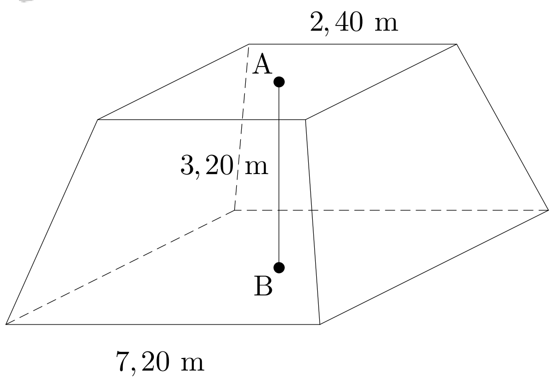
II – **Falsa.** Basta o contra-exemplo em que r e s são ortogonais, por exemplo, contendo arestas de um cubo. Veja a figura abaixo:



III – **Verdadeira.** Caso AC e BD sejam concorrentes elas determinarão um ponto E de concorrência. Como três pontos determinam um único plano, teremos dois triângulos coplanares: ABE e DCE.

Questão 12

Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de 11 m^2 por galão.

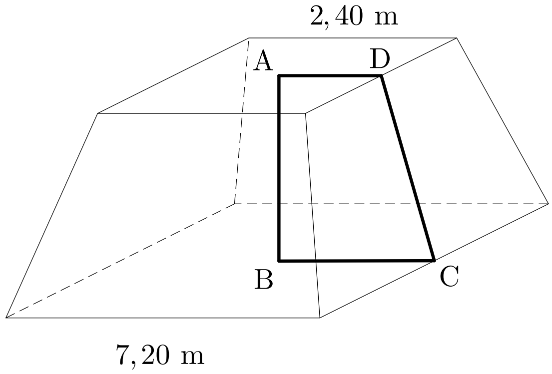


O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

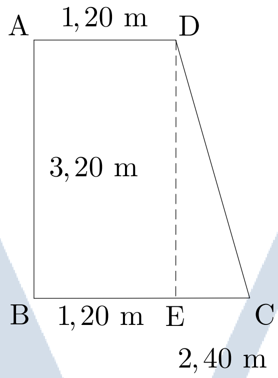
(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Solução:

Analisando a figura podemos traçar o trapézio ABCD abaixo:



Analisando somente o trapézio:



O triângulo CDE é retângulo em E, portanto:

$$CD^2 = DE^2 + CE^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{24}{10}\right)^2 + \left(\frac{32}{10}\right)^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{4 \cdot 3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 4}{5}\right)^2 \Rightarrow CD = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 (9+16)}$$

$$CD = 4 \text{ m}$$

Como CD é a altura do trapézio que compõem as 4 faces laterais do tronco de pirâmide, a área lateral a ser pintada é dada por:

$$S = 4 \cdot \frac{(7,2 + 2,4) \cdot 4}{2}$$

$$S = 76,8 \text{ m}^2$$

Assim deve-se comprar 7 galões – que pintarão até 77 m^2 de superfície – para pintar toda a superfície lateral.

Opção B

Questão 13

Um investidor possui ações das companhias A, B e C. A tabela abaixo fornece, em 3 dias consecutivos, as variações, em Reais, dos valores das ações e o lucro obtido em cada dia, também em Reais. Os valores negativos correspondem a desvalorizações, e os valores positivos a valorizações.

	Variações(R$)			Lucro Total (R$)
	A	B	C	
Dia 1	4	5	−2	800
Dia 2	1	2	−1	200
Dia 3	2	3	3	1700

Sabendo que o investidor não comprou nem vendeu ações nesses dias, pode-se afirmar que a soma das quantidades de ações das companhias A, B e C que ele possui é

(A) 700 (B) 600 (C) 550 (D) 400 (E) 350

Solução:

Supondo que o investidor possua **x** ações da companhia A, **y** ações da companhia B e **z** ações da companhia C. As equações abaixo representam os dias:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 800 \\ x + 2y - z = 200 \\ 2x + 3y + 3z = 1700 \end{cases}$$

Há várias formas de solucionar esse sistema. Vamos usar a substituição de uma equação na outra. Assim, da segunda equação:

$$z = x + 2y - 200$$

Substituindo esta expressão na primeira e na terceira equação teremos:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2(x + 2y - 200) = 800 \\ 2x + 3y + 3(x + 2y - 200) = 1700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 5y - 2x - 4y + 400 = 800 \\ 2x + 3y + 3x + 6y - 600 = 1700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 400 \\ 5x + 9y = 2300 \end{cases}$$

Da primeira equação teremos

$$y = 400 - 2x$$

Substituindo na outra:

$$5x + 9(400 - 2x) = 2300$$
$$5x + 3600 - 18x = 2300$$
$$-13x = -1300$$
$$x = 100$$

Como $y = 400 - 2x$ teremos para y:

$$y = 200$$

Sabemos que $z = x + 2y - 200$, então:

$$z = 300$$

Portanto a soma $x + y + z$ é igual a 600.

Opção B

Questão 14

Sete livros didáticos, cada um de uma disciplina diferente, devem ser posicionados lado a lado em uma estante, de forma que os livros de Física, de Química e de Matemática estejam sempre juntos, em qualquer ordem. O número de maneiras diferentes em que esses livros podem ser posicionados é

(A) 720 (B) 1440 (C) 2160 (D) 2880 (E) 5040

Solução:

Podemos representar esta situação pelo esquema

$$[FQM]ABCD$$

Onde F,Q e M representam os livros de Física, Química e Matemática. As letras A,B,C e D representam as outras 4 disciplinas. Podemos considerar [FQM] como um dos cinco elementos que permutam. O que nos dá:

$$P_5 = 5! \Rightarrow P_5 = 120$$

Para cada uma dessas 120 teremos uma permutação de F, Q e M. Portanto, o total será:

$$T = 120 \cdot 3! \Rightarrow T = 720$$

Opção A