Soluções de Questões de Matemática do Exame de Admissão ao Curso Preparatório de Cadetes do Ar – CPCAr

Concurso 2010/2011

Questão 25

Considere os números positivos **q**, **m** e **n**, tais que $\frac{m}{n+q} = 2$ e $\frac{m}{n-q} = 3$

Ordenando-os, tem-se a sequência correta em

a) $m > n > q$ b) $m > q > n$ c) $n > m > q$ d) $q > n > m$

Solução:

Da primeira expressão:

$$\frac{m}{n+q} = 2 \Rightarrow m = 2(n+q)$$

Da segunda expressão:

$$\frac{m}{n-q} = 3 \Rightarrow m = 3(n-q)$$

Igualando as duas expressões:

$$2(n+q) = 3(n-q)$$

$$2n + 2q = 3n - 3q \Rightarrow 5q = n \Rightarrow q = \frac{n}{5}$$

Como todos os números são positivos, $q > n$.

Substituindo em uma das expressões anteriores

$$\frac{m}{n + \frac{n}{5}} = 2 \Rightarrow m = 2 \cdot \frac{6n}{5} \Rightarrow m = \frac{12n}{5}$$

Como todos os números são positivos, $m > n$.

Substituindo na mesma expressão, agora em função de **q.**

$$\frac{m}{5q+q} = 2 \Rightarrow m = 2 \cdot 6q \Rightarrow m = 12q$$

Como todos os números são positivos, $m > q$.

O que nos dá:

$$m > q > n$$

Opção B

Questão 26

Se $x = 1,0\overline{62} + \dfrac{\left[(-2)^{\left(2\sqrt{2}+1\right)}\right]^{\left(2\sqrt{2}-1\right)}}{64}$, então x está compreendido entre

a) -1 e $-0,9$ b) $-0,9$ e $-0,8$ c) $-0,8$ e $-0,7$ d) $-0,7$ e 0,6

Solução:
Desenvolvendo a expressão:

$$x = 1,0\overline{62} + \frac{\left[(-2)^{\left(2\sqrt{2}+1\right)}\right]^{\left(2\sqrt{2}-1\right)}}{64}$$

$$x = 1,0\overline{62} + \frac{\left[(-2)^{\left(\left(2\sqrt{2}\right)^2-1\right)}\right]}{64}$$

$$x = 1,0\overline{62} + \frac{\left[(-2)^7\right]}{64}$$

$$x = 1,0\overline{62} - 2$$

$$x = 1 - 2 + 0,0626262...$$

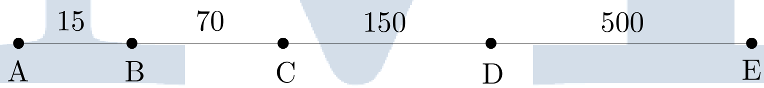
$$x = -1 + 0,0626262...$$

Podemos, calcular a fração geratriz da dízima periódica, mas isso não é necessário para verificar que $-1 < x < -0,9$.

Opção A

Questão 27

Um agricultor fará uma plantação de feijão em canteiro retilíneo. Para isso, começou a marcar os locais onde plantaria as sementes. A figura abaixo indica os pontos já marcados pelo agricultor e as distâncias, em cm, entre eles.



Esse agricultor, depois, marcou outros pontos entre os já existentes, de modo que a distância **d** entre todos eles fosse a mesma e a maior possível. Se **x** representa o número de vezes que a distância **d** foi obtida pelo agricultor, então **x** é um número divisível por

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

Solução:
Para que todas as distâncias sejam iguais entre os pontos devemos calcular o MDC entre as distâncias. Fatorando os valores dados:

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$500 = 2^2 \cdot 5^3$$

Como o MDC é dado pelo fatores comuns de menor expoente temos que:

$$\text{MDC}(15, 70, 150, 500) = 5$$

O número de vezes que a distância aparece é:

$$x = \frac{15}{5} + \frac{70}{5} + \frac{150}{5} + \frac{500}{5}$$

$$x = 3 + 14 + 30 + 100 \Rightarrow x = 147$$

Opção D

Questão 28

Para a reforma do Ginásio de Esporte da EPCAR foram contratados 24 operários. Eles iniciaram a reforma no dia 19 de abril de 2010 (2^{a} feira) e executaram 40% do trabalho em 10 dias, trabalhando 7 horas por dia. No final do 10^{a} dia, 4 operários foram dispensados.

No dia seguinte, os operários restantes retomaram o trabalho, trabalhando 6 horas por dia e concluíram a reforma. Sabendo-se que o trabalho foi executado nos dois momentos sem folgas em nenhum dia, o dia da semana correspondente ao último dia do término de todo o trabalho é

a) domingo. b) segunda-feira. c) terça-feira d) quarta-feira

Solução:

O problema em questão é uma regra de três composta:

Nº de operários	**% de trabalho completo**	**Horas de trabalho por dia**	**Total de dias trabalhados**
24	0,6	7	10
1	0,6	7	$10 \cdot 24$
1	0,6	1	$10 \cdot 24 \cdot 7$
1	1	1	$10 \cdot 24 \cdot 7 \cdot 0,6$
20	1	1	$10 \cdot 24 \cdot 7 \cdot \frac{0,6}{20}$
20	0,4	1	$\frac{10 \cdot 24 \cdot 7}{0,4} \cdot \frac{0,6}{20}$
20	0,4	6	$\frac{10 \cdot 24 \cdot 7}{0,4} \cdot \frac{20 \cdot 0,6}{6}$

O total de dias trabalhados com 20 operários é:

$$T = \frac{10 \cdot 24 \cdot 7}{0,4} \cdot \frac{0,6}{20 \cdot 6} \Rightarrow T = \frac{10 \cdot 24 \cdot 7}{4} \cdot \frac{6}{20 \cdot 6} \Rightarrow T = \frac{24 \cdot 7}{4} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow T = 21$$

Portanto, serão mais 3 semanas além dos 10 dias já trabalhados. Começando na segunda feira, 10 dias terminam em uma 4^{a} feira. Com mais exatas 3 semanas os trabalhos acabarão em uma 4^{a} feira.

Opção D

Questão 29

Lucas e Mateus ganharam de presente de aniversário as quantias **x** e **y** reais, respectivamente, e aplicaram, a juros simples, todo o dinheiro que ganharam, da seguinte forma:

1) Mateus aplicou a quantia **y** durante um tempo que foi metade do que esteve aplicado a quantia **x** de Lucas.

2) Mateus aplicou seu dinheiro a uma taxa igual ao triplo da taxa da quantia aplicada por Lucas.

3) No resgate de cada quantia aplicada, Lucas e Mateus receberam o mesmo valor de juros.

Se juntos os dois ganharam de presente 516 reais, então $x - y$ é igual a

a) R$ 103,20 b) R$ 106,40 c) R$ 108,30 d) R$ 109,60

Solução:

Seja C_0 a quantidade inicial a ser aplicada (capital), **i** a taxa de juros, **t** o tempo considerado e **C** a quantidade final (montante), podemos chegar a conclusão de que a quantidade final será dada pela expressão:

$$C = C_0 + C_0 \cdot i \cdot t$$

Onde $C_0 \cdot i \cdot t$ é chamado de **juros**.

Assim para Mateus:

$$C_M = y + y \cdot 3i \cdot \frac{t}{2}$$

Assim para Lucas:

$$C_L = x + x \cdot i \cdot t$$

Do enunciado temos:

$$\begin{cases} x + y = 516 \\ y \cdot 3i \cdot \frac{t}{2} = x \cdot i \cdot t \end{cases}$$

Desenvolvendo a segunda equação:

$$y \cdot \frac{3}{2} = x$$

Substituindo uma equação na outra:

$$\frac{3y}{2} + y = 516 \Rightarrow 5y = 1032 \Rightarrow y = \frac{1032}{5}$$

Logo:

$$x = \frac{1032}{5} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1548}{5}$$

Então:

$$x - y = \frac{1548 - 1032}{5} \Rightarrow x - y = 103,2$$

Opção A

Questão 30

Considere três números naturais **a**, **b** e **c**, nessa ordem. A soma desses números é 888, a diferença entre o primeiro e o segundo é igual ao terceiro. O terceiro deles excede o segundo em 198.

O valor da diferença entre o primeiro e o terceiro é tal que excede 90 em

a) 23 b) 33 c) 43 d) 53

Solução:

De acordo com o enunciado:

$$\begin{cases} a + b + c = 888 \\ a - b = c \\ c = b + 198 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação na segunda e na primeira:

$$\begin{cases} a + b + b + 198 = 888 \\ a - b = b + 198 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 690 \\ a = 2b + 198 \end{cases}$$

Substituindo a segunda na primeira:

$$2b + 198 + 2b = 690 \Rightarrow 4b = 492$$

Então:

$$b = 123$$

Calculando **a**:

$$a = 2 \cdot 123 + 198 \Rightarrow a = 444$$

Calculando **c**:

$$c = 444 - 123 \Rightarrow c = 321$$

Calculando $a - c$:

$$444 - 321 = 123 \Rightarrow 444 - 321 = 90 + 33$$

Opção B

Questão 31

Se somarmos sete números inteiros pares positivos e consecutivos, obteremos 770. O número de divisores naturais do maior dos sete números citados é

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12

Solução:

Sete pares inteiros consecutivos somados são representados abaixo:

$$2x + 2x + 2 + 2x + 4 + 2x + 6 + 2x + 8 + 2x + 10 + 2x + 12 = 770$$
$$14x + 42 = 770$$
$$x = 52$$

O maior deles:

$$2x + 12 = 116$$

Fatorando

$$116 = 2^2 \cdot 29$$

O número de divisores:

$$D = (2+1)(1+1) \Rightarrow D = 6$$

Opção A

Questão 32

Analise as alternativas abaixo, considerando todas as equações na incógnita **x**, e, a seguir, marque a correta.

a) Na equação $x^2 - mx + n = 0$ $(m, n \in \mathbb{R})$, sabe-se que **a** e **b** são raízes reais. Logo, o valor de $(a+b)-(a \cdot b)$ é, necessariamente, $(n-m)$

b) Para que a soma das raízes da equação $2x^2 - 3x + p = 0$ $(p \in \mathbb{R})$ seja igual ao produto dessas raízes, **p** deve ser igual a $\frac{3}{2}$

c) Se a equação $3x^2 - 3x + m = 0$ $(m \in \mathbb{R})$ **NÃO** possui raízes reais, então o valor de **m** pode ser igual a $-\frac{3}{4}$

d) Uma das raízes da equação $x^2 + Sx - P = 0$, $(S, P \in \mathbb{R})$ é o número 1, logo $(S-P)$ é igual a -1

Solução:

Analisando cada afirmativa:

a) **Falsa.** Dada a equação $x^2 - mx + n = 0$ se a e b são as raízes então:

$$\text{Soma das raízes: } a + b = \frac{-(-m)}{1} \Rightarrow a + b = m$$

$$\text{Produto das raízes: } ab = \frac{n}{1} \Rightarrow ab = n$$

Então:

$$(a+b)-(a\cdot b) = m-n$$

b) **Falsa.** Dada a equação $2x^2 - 3x + p = 0$:

$$\text{Soma das raízes: } S = \frac{-(-3)}{2} \Rightarrow S = \frac{3}{2}$$

$$\text{Produto das raízes: } P = \frac{p}{2}$$

Se a soma é igual ao produto:

$$\frac{3}{2} = \frac{p}{2} \Rightarrow p = 3$$

c) **Falsa.** Para que a equação $3x^2 - 3x + m = 0$ não possua raízes reais devemos ter:

$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 3\cdot m < 0$$

$$9 - 12m < 0 \Rightarrow 12m > 9 \Rightarrow m > \frac{3}{4}$$

d) **Verdadeira.** Como uma das raízes é igual a 1, temos:

$$1 + S - P = 0 \Rightarrow S - P = -1$$

Opção D

Questão 33

Se $a \in \mathbb{R}_+^*$ é raiz da equação na incógnita **y**, $\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}} = y-1$, então

a) $0 < a < 1$ b) $1 < a < 3$ c) $\frac{3}{2} < a < 2$ d) $2 < a < 5$

Solução:

$$\sqrt{1-\sqrt{y^4-y^2}} = y-1$$

Elevando ao quadrado de ambos os lados:

$$1-\sqrt{y^4-y^2} = y^2 - 2y + 1$$

$$-\sqrt{y^4-y^2} = y^2 - 2y$$

Colocando y^2 em evidência:

$$\sqrt{y^2(y^2-1)} = y(y-2)$$

Como a raiz é **positiva**, podemos escrever:

$$y\sqrt{y^2-1} = y(y-2)$$

$$\sqrt{y^2-1} = (y-2) \Rightarrow y^2 - 1 = (y-2)^2$$

$$y^2 - 1 = y^2 - 4y + 4$$

$$-1 = -4y + 4 \Rightarrow -5 = -4y \Rightarrow y = \frac{5}{4}$$

Observação: O enunciado diz que há uma raiz e por isso não vamos testar este valor, mas o ideal é sempre “testar” para verificar a introdução de raízes “estranhas”.

Opção B

Questão 34

No tempo $t = 0$, o tanque de um automóvel está com α litros de combustível. O volume de combustível no tanque, em litros, após o carro entrar em movimento, é descrito por uma função do 2º grau em função do tempo **t**, em minutos.

O carro entra em movimento. Após 10 minutos do início do movimento, o tanque está com 36 litros de combustível e após 3 horas e 10 minutos do início do movimento, o volume de combustível no tanque se esgota. Sabe-se que o gráfico dessa função toca o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ num único ponto de coordenadas (190, 0) Dessa forma, o número α está compreendido entre

a) 40 e 42 b) 42 e 44 c) 44 e 46 d) 46 e 48

Solução:

Como o volume do tanque é descrito como uma função do 2º grau nós temos:

$$V(t) = at^2 + bt + c$$

Para $t = 0$:

$$V(0) = c \Rightarrow c = \alpha$$

Para $t = 10$:

$$V(10) = a \cdot 100 + b \cdot 10 + \alpha \Rightarrow 100a + 10b + \alpha = 36$$

Para $t = 190$ (3 h e 10 min):

$$V(190) = a(190)^2 + b \cdot 190 + \alpha \Rightarrow 190^2 \cdot a + 190b + \alpha = 0$$

Se a parábola só toca o eixo x no ponto $(190, 0)$ a abscissa d vértice é:

$$t_V = -\frac{b}{2a} \Rightarrow -\frac{b}{2a} = 190$$

Temos então o sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b + \alpha = 36 \\ 190^2 \cdot a + 190b + \alpha = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 190 \end{cases}$$

Comparando a primeira e a segunda equações:

$$100a + 10b + \alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 36 - 100a - 10b$$

$$190^2 \cdot a + 190b + \underbrace{36 - 100a - 10b}_{\alpha} = 0$$

$$190^2 \cdot a - 100a + 180b = -36$$

Comparando este resultado com a terceira equação:

$$190^2 \cdot a - 100a + 180(-2 \cdot 190a) = -36 \Rightarrow 190^2 a - 100a - 2 \cdot 180 \cdot 190a = -36$$

$$36100a - 100a - 68400a = -36$$

$$-32400a = -36$$

$$a = \frac{18 \cdot 2}{18^2 \cdot 10^2} \Rightarrow a = \frac{1}{900}$$

Calculando **b**:

$$-\frac{b}{2\dfrac{1}{900}} = 190 \Rightarrow -b = \frac{190 \cdot 2}{900} \Rightarrow b = -\frac{19}{45}$$

Calculando α:

$$100 \cdot \frac{1}{900} - 10 \cdot \frac{19}{45} + \alpha = 36 \Rightarrow \alpha = 36 - \frac{1}{9} + \frac{38}{9} \Rightarrow \alpha = 36 - \frac{1}{9} + \frac{38}{9}$$

$$\alpha = 36 + \frac{37}{9} \Rightarrow \alpha = 36 + 4,1\bar{1} \Rightarrow \alpha = 40,111...$$

Opção A

Questão 35

Certo dia, Isabela e Ana Beatriz saíram para vender pastéis na praia. Elas tinham juntas 460 pastéis. No final do dia, verificou-se que Isabela conseguiu vender $\frac{3}{5}$ dos pastéis que levaram e Ana Beatriz $\frac{5}{8}$ dos pastéis que levara.

Ao final do dia, o número de pastéis que restou para Ana Beatriz era a metade do número de pastéis que restou para Isabela.

Se Ana Beatriz, levou **x** pastéis para vender, então, a soma dos algarismos de **x** é:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9

Solução:

Seja **y** o total de pastéis que Isabela levou para vender, então:

$$x + y = 460$$

No final do dia teremos:

$$\text{Sobra de Isabela (I): } I = \frac{2}{5}y \quad \left(\text{vendeu } \frac{3}{5}\right)$$

$$\text{Sobra de Ana Beatriz (B): } B = \frac{3}{8}x \quad \left(\text{vendeu } \frac{5}{8}\right)$$

Do enunciado dado temos:

$$B = \frac{I}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}y$$

$$\frac{3}{8}x = \frac{1}{5}y \Rightarrow x = \frac{8y}{15}$$

Usando a equação inicial:

$$y + \frac{8y}{15} = 460$$

$$\frac{15y + 8y}{15} = 460 \Rightarrow 23y = 15 \cdot 460 \Rightarrow y = 300$$

Portanto:

$$x = \frac{8y}{15} \Rightarrow x = 8 \cdot 20 \Rightarrow x = 160$$

A soma dos algarismos é, portanto 7.

Opção B

Questão 36

Em um certo período, o valor total da cesta básica de alimentos subiu 82% e o salário mínimo, nesse mesmo período, aumentou 30%.

Para que recupere o poder de compra da cesta básica de alimentos, o salário mínimo deverá ser aumentado em y%.

O valor de **y**, então, é tal que 20 está para **y** assim como 8 está para

a) 12 b) 16 c) 24 d) 32

Solução:

Seja S o salário mínimo e C a cesta básica, ambos antes do primeiro aumento. Assim:

Novo salário mínimo: $1,3 \cdot \mathrm{S}$

Novo preço da cesta básica: $1,82 \cdot \mathrm{C}$

Queremos que o salário mínimo aumente a ponto de seu valor final ser igual ao preço da cesta básica:

$$1,3 \cdot z \cdot \mathrm{S} = 1,82 \cdot \mathrm{C}$$

Como no início o salário poderia comprar a cesta temos $\mathrm{S} = \mathrm{C}$, o que nos dá:

$$z = \frac{1,82}{1,3} \Rightarrow z = 1,4$$

O aumento, portanto, é de 40%. Fazendo a proporção dada pelo enunciado:

$$\frac{20}{40} = \frac{8}{t} \Rightarrow t = \frac{320}{20} \Rightarrow t = 16$$

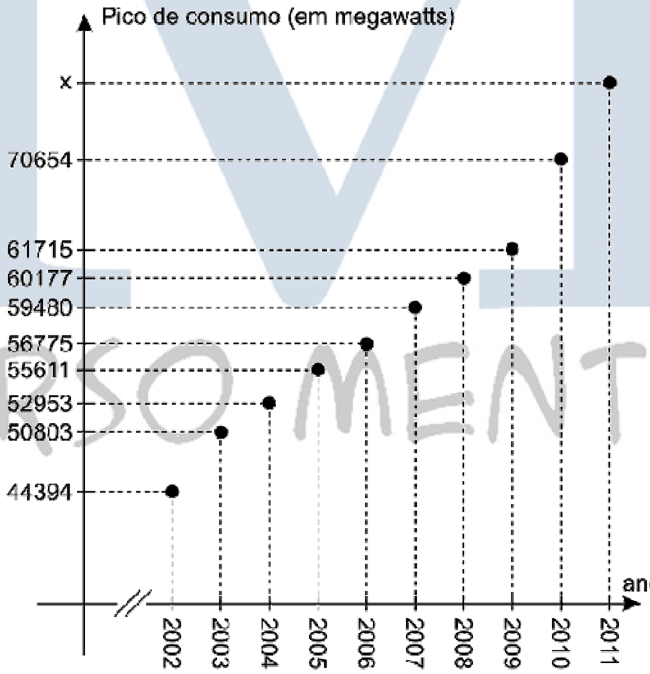
Questão 37

"Demanda Crescente

O consumo de energia elétrica no Brasil nunca foi tão alto. Na quinta-feira passada, atingiu seu recorde histórico. O valor é muito superior ao registro em anos, anteriores"

(revista ***Veja*** *– 10/02/10 – p.71)*

O gráfico abaixo indica o pico de consumo de energia (em megawatts) na primeira quinta-feira de fevereiro dos anos de 2002 a 2010.



Analisando-se o gráfico acima e supondo-se que em 2011, na primeira quinta-feira do mês de fevereiro, haverá um crescimento do pico de consumo de energia, proporcional ao crescimento ocorrido na primeira quinta-feira do mês de fevereiro do ano de 2009 ao ano de 2010, é correto afirmar que **x** é um número compreendido entre

a) 76000 e 77000 b) 77000 e 78000 c) 78000 e 79000 d) 79000 e 80000

Solução:

Dizer que o crescimento de 2010 para 2011 é proporcional ao crescimento de 2009 para 2010 é mesmo que dizer estes três pontos são colineares. Podemos calcular, então, por semelhança de triângulos:

$$\frac{x-61715}{70654-61715}=\frac{2011-2009}{2010-2009}$$
$$x-61715=2\cdot 8939$$
$$x=79593$$

Opção D

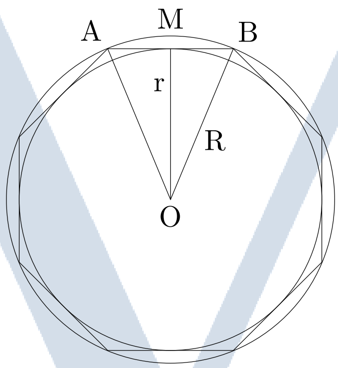
Questão 38

Considere o octógono regular ABCDEFG inscrito numa circunferência λ e de raio R. Se esse mesmo octógono circunscreve uma circunferência α de raio r, então razão entre os quadrados dos comprimentos das circunferências λ e α é, nessa ordem, igual a

a) $2+\sqrt{2}$ b) $2\left(2+\sqrt{2}\right)$ c) $2\left(2-\sqrt{2}\right)$ d) $\left(2-\sqrt{2}\right)$

Solução:

Fazendo a figura do enunciado:



O ângulo $A\hat{O}B$ mede:

$$A\hat{O}B=\frac{360°}{8}\Rightarrow A\hat{O}B=45°$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo AOB:

$$AB^2=R^2+R^2-2R\cdot R\cos 45°\Rightarrow AB=\sqrt{2R^2-2R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$AB=\sqrt{2R^2-2R^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow AB=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Como M é ponto médio do segmento AB, podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo OMB:

$$R^2=r^2+\left[\frac{R}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)\right]^2$$
$$R^2=r^2+\frac{R^2}{4}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\Rightarrow R^2\left(1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)=r^2$$
$$\frac{R^2}{r^2}=\frac{1}{\left(1-\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)}\Rightarrow\frac{R^2}{r^2}=\frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

Racionalizando:

$$\frac{R^2}{r^2}=\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}\Rightarrow\frac{R^2}{r^2}=2\left(2-\sqrt{2}\right)$$

Opção C

Questão 39

Sabe-se que **x**, **y** e **z** são números naturais distintos e $x > y$. Considere $A = x \cdot y$ e $B = \left(x \cdot y \cdot z\right)^2$ e que o mdc (A,B) e o mmc (A,B) são, respectivamente, 21 e 1764. Se $W = x^2 + y^2 + z^2$, então o conjunto formado pelos divisores naturais de W possui

a) 4 elementos. b) 6 elementos. c) 9 elementos. d) 12 elementos.

Solução:

Sabemos que $A = x \cdot y$ e $B = \left(x \cdot y \cdot z\right)^2$. Calculando o mdc(A,B):

$$\text{mdc}\left(A,B\right) = xy \Rightarrow xy = 21$$

Fatorando 21 obtemos:

$$xy = 3 \cdot 7$$

Como $x > y$ então:

$$x = 7 \text{ e } y = 3$$

Observação: poderíamos ter $x = 21$ e $y = 1$, mas isso não altera o resultado final para esta questão.

Fazendo agora o mdc(A,B):

$$\text{mdc}\left(A,B\right) = x^2y^2z^2 \Rightarrow x^2y^2z^2 = 1764$$

Fatorando 1764 teremos:

$$x^2y^2z^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

Usando x e y obtidos anteriormente:

$$7^2 \cdot 3^2 z^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \Rightarrow z^2 = 4$$

Calculando W:

$$W = 49 + 9 + 4 \Rightarrow W = 62 \Rightarrow W = 2 \cdot 31$$

Calculando o número de divisores:

$$D = \left(1+1\right)\left(1+1\right) \Rightarrow D = 4$$

Opção A

Questão 40

Um comerciante vendeu 50% dos $\frac{3}{5}$ de seu estoque de pares de meia com lucro de 30% sobre o custo. Como pretendia renovar o estoque, reduziu o preço de venda e acabou tendo um prejuízo de 10% sobre o custo com a venda dos pares que restam em sua loja. É correto afirmar que, ao final do estoque, esse comerciante teve, sobre o custo, um

a) lucro de 2% b) lucro de 20% c) prejuízo de 2% d) prejuízo de 20%

Solução:

Seja **x** o número de pares no estoque e **c** o preço de custo. Equacionando o problema para o lucro L:

$$L = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot x \cdot 1{,}3 \cdot c + \frac{7}{10} \cdot x \cdot 0{,}9 \cdot c$$

$$L = \frac{3{,}9}{10} \cdot xc + \frac{6{,}3}{10} \cdot xc$$

$$L = 1{,}02 \cdot xc$$

O que significa um lucro de 2% sobre o valor total da compra.

Opção A

Questão 41

A "Avenida Euclidiana", retilínea, tem 190m de comprimento e 0,5 dam de largura em toda a sua extensão. Para asfaltá-la, são necessários 380 kg de asfalto. Pretende-se asfaltar a "Avenida Pitagórica", também retilínea, cuja largura é 100 cm maior que a largura da "Avenida Euclidiana", onde será necessário utilizar 930 kg do mesmo asfalto (mesma espessura). Se o comprimento da "Avenida Pitagórica" é **x** dm, então, a soma, dos algarismos de **x** é igual a

a) 22 b) 23 c) 24 d) 25

Solução:
Primeiro precisamos colocar todas as medidas na mesma unidade. Usaremos para todas elas o **metro**. Segundo, verificamos quantos kg de asfalto são necessários para cada metro quadrado de avenida:

$$C = \frac{380}{5 \cdot 190} \Rightarrow C = \frac{2}{5} \Rightarrow C = 0,4 \text{ kg / m}^2$$

Usando esta mesma relação para a "Avenida Pitagórica":

$$0,4 = \frac{930}{6 \cdot x} \Rightarrow x = \frac{930}{2,4} \Rightarrow x = 387,5 \text{ m}$$

Estando x em metros ou decímetros a soma de seus algarismos não muda, logo:

$$S = 3 + 8 + 7 + 5 \Rightarrow S = 23$$

Opção B

Questão 42

Numa turma de um cursinho, 40% dos alunos são menores de idade. Com o objetivo de que somente metade dessa turma fosse composta por alunos maiores de idade, x% dos alunos maiores de idade foram remanejados para outra turma. Sabendo-se que não houve mais mudança nesse turma, é correto afirmar que x é igual a

a) 20 b) 30 c) $33,\bar{1}$ d) $33,\bar{3}$

Solução:
Seja M o total de alunos da turma. O número de alunos maiores de idade é 0,6M e, o de menores, 0,4M. O que queremos é representado pela expressão abaixo:

$$0,6M - y = 0,5(M - y)$$

Onde y é o número de alunos maiores de idade que deixou a turma. Resolvendo a expressão anterior na variável y:

$$0,6M - 0,5M = y - 0,5y$$
$$y = 0,2M$$

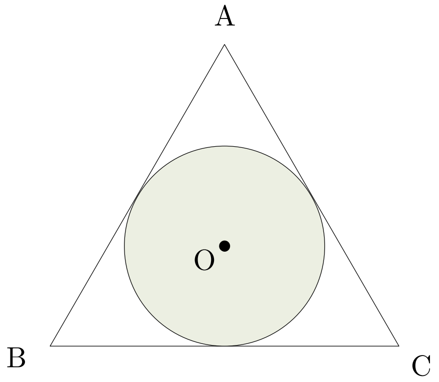
Calculando x teremos:

$$x\% = \frac{0,2M}{0,6M} \Rightarrow x\% = 0,333... \Rightarrow x\% = 33,3\bar{3}\%$$

Opção D

Questão 43

A figura representa o logotipo que será estampado em 450 camisetas de uma Olimpíada de Matemática realizada entre os alunos do "Colégio Alfa". Essa figura é formada por um círculo de centro O inscrito num triângulo isósceles cuja base $\overline{BC}$ mede 24 cm e altura relativa a esse lado mede 16 cm. O círculo será pintado com tinta cinza e sabe-se que é necessário, exatamente, 1 pote de tinta cinza para pintar 5400 cm^2



Adote $\pi = 3$

Com base nesses dados, é correto afirmar que o número de potes necessários para pintar o círculo em todas as camisetas é igual a

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

Solução:

Seja R o raio do círculo, M o ponto de interseção do círculo com o lado AC e N o ponto médio da base BC. Temos que o triângulo AON é semelhante ao triângulo ANC, então podemos escrever:

$$\frac{OM}{NC} = \frac{AO}{AC}$$

Como AC é hipotenusa do triângulo ANC, podemos escrever:

$$\frac{R}{12} = \frac{16 - R}{\sqrt{144 + 256}} \Rightarrow 20R = 12(16 - R)$$

$$5R + 3R = 48 \Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$

A área de um único círculo é:

$$S_{\bigcirc} = \pi R^2 \Rightarrow S_{\bigcirc} = 36\pi \text{ cm}^2$$

Para 450 camisetas:

$$S_{\bigcirc} = 36 \cdot 3 \cdot 450 \text{ cm}^2$$

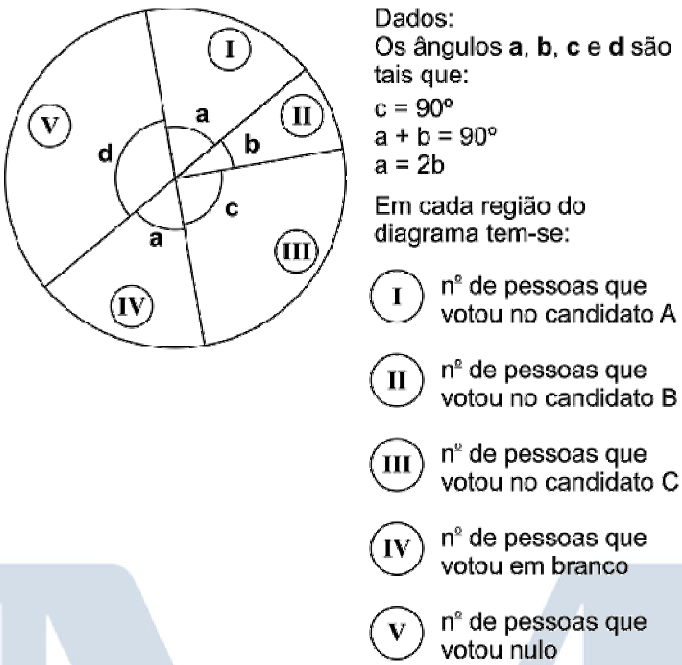
O número X de potes a serem usados:

$$X = \frac{36 \cdot 3 \cdot 450}{5400} \Rightarrow X = \frac{4 \cdot 3 \cdot 45}{60} \Rightarrow X = 9 \text{ potes}$$

Opção A

Questão 44

Para as eleições para a Presidência da República do Brasil foi feita uma pesquisa com 2400 pessoas sobre suas preferências em relação aos candidatos A, B e C. Sabe-se que cada pessoa optou por um único candidato, ou votou em branco, ou votou nulo, e que o diagrama abaixo indica os resultados da pesquisa.



Sabe-se que a diferença entre o número de pessoas que votou nulo e o número de pessoas que votou em B é y. Então, y representa a/o

a) quarta parte do total de entrevistados.
b) metade do total de entrevistados.
c) terça parte do total de entrevistados.
d) dobro do número de pessoas que votou em C.

Solução:
Usando os dados do problema vamos calcular os ângulos **a**, **b**, **c** e **d:**

$$c = 90°$$

$$\begin{cases} a + b = 90° \\ a = 2b \end{cases} \Rightarrow 3b = 90° \Rightarrow b = 30°$$

$$a = 60°$$

$$2a + b + c + d = 360° \Rightarrow d = 360° - 120° - 30° - 90° \Rightarrow d = 120°$$

Com isso, já podemos obter alguma informação sobre os votos. A diferença entre o número de pessoas que votou nulo e o número de pessoas que votou em B é dado pela diferença dos percentuais associados aos ângulos **d** e **b:**

$$y = d - b \Rightarrow y = 120° - 30° \Rightarrow y = 90°$$

Como 90° corresponde a um quarto da circunferência, temos que y corresponde à quarta parte do total de entrevistados.

Opção A

Questão 45

Sabendo que $y = (2010)^2 \cdot 2000 - 2000 \cdot (1990)^2$, o valor de $\frac{y}{10^7}$ é igual a:

a) 8 b) 16 c) 20 d) 32

Solução:
Desenvolvendo a expressão para y:

$$y = (2010)^2 \cdot 2000 - 2000 \cdot (1990)^2 \Rightarrow y = 2000\left[(2010)^2 - (1990)^2\right]$$

$$y = 2000\left[(2010-1990)(2010+1990)\right]$$

$$y = 2000\left[(20)(4000)\right] \Rightarrow y = 16 \cdot 10^7 \Rightarrow \frac{y}{10^7} = 16$$

Opção B

Questão 46

Simplificando-se a expressão $S = \dfrac{\left(x^{-2}\right)^{2^{2^2}} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[\left(-x^3\right)^{3^2}\right]^{2^3}}$, onde $x \neq 0$, $x \neq 1$ e $x \neq -1$, obtém-se

a) $-x^{-94}$ b) x^{94} c) x^{-94} d) $-x^{94}$

Solução:
Desenvolvendo a expressão:

$$S = \frac{\left(x^{-2}\right)^{2^{2^2}} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^{2^2}}\right]^{-1}}{x^{2^3} \cdot \left[\left(-x^3\right)^{3^2}\right]^{2^3}} = \frac{\left(x^{-2}\right)^{2^4} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{3^4}\right]^{-1}}{x^8 \cdot \left[\left(-x^3\right)^9\right]^8} = \frac{\left(x^{-2}\right)^{16} \cdot \left[\left(-x^{-2}\right)^{81}\right]^{-1}}{x^8 \cdot \left(-x^3\right)^{72}} = -\frac{(x)^{-32} \cdot \left[(-x)^{-162}\right]^{-1}}{x^8 \cdot (-x)^{216}}$$

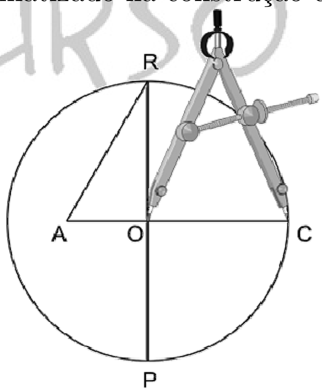
$$S = -\frac{(x)^{-32} \cdot \left[(-x)^{-162}\right]^{-1}}{x^8 \cdot (-x)^{216}} = -x^{-32-8} \cdot (-x)^{162-216} = -x^{-40} \cdot (-x)^{-54} = -x^{-40} \cdot \left[(-1)^{-54} \cdot x^{-54}\right]$$

$$S = -x^{-40} \cdot \left[(-1)^{-54} \cdot x^{-54}\right] = -x^{-40-54} \cdot \frac{1}{1^{54}} = -x^{-94}$$

Opção A

Questão 47

O quarteto de alunos da corrida de revezamento do CPCAR tem como "escudo" o desenho esquematizado na construção com régua e compasso abaixo.



CONSIDERE
$\text{med}\left(\overset{\frown}{CP}\right) = x$ cm
$\text{med}\left(\overset{\frown}{CR}\right) = y$ cm
$\text{med}\left(\overset{\frown}{RP}\right) = z$ cm
$\pi = 3$

Sabe-se que a abertura do compasso no esquema é de 5 cm, o centro da circunferência é O, o ângulo $C\hat{A}R$ mede 60° e os ângulos $C\hat{O}P$, $C\hat{O}R$, $P\hat{O}A$ e $R\hat{O}A$ são congruentes. Sendo $E = x + \overline{PO} + \overline{OR} + \overline{RA} + \overline{OA} + \overline{OC} + y + z$, o valor de E, em cm, é dado por

a) $15\left(3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ b) $5\left(11+\sqrt{2}\right)$ c) $5\left(11+\sqrt{3}\right)$ d) $5\left(9+\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

Solução:
No triângulo AOR:

$$\text{tg}60° = \frac{5}{\overline{AO}} \Rightarrow \overline{OA} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen}60° = \frac{5}{\overline{RA}} \Rightarrow \overline{RA} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

Como O é centro do círculo:

$$\overline{PO} = \overline{OR} = 5 \text{ cm}$$

Note que $\overset{\frown}{CP} + \overset{\frown}{CR} + \overset{\frown}{RP} = 2\pi \cdot 5$, então, calculando E:

$$E = x + \overline{PO} + \overline{OR} + \overline{RA} + \overline{OA} + \overline{OC} + y + z \Rightarrow E = 2\cdot 3\cdot 5 + 5 + 5 + \frac{10\sqrt{3}}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

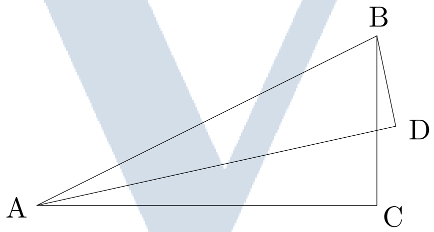
$$E = 45 + 5\sqrt{3}$$

$$E = 15\left(3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow E = 15\left(3+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Opção A

Questão 48

Em relação à figura abaixo, tem-se $C\hat{A}D = 30°$, $\overline{AC} = 2$ cm e $\overline{BC} = 4$ cm



Se $AC \perp CB$, $AD \perp DB$ então, $\overline{BD}$, em cm, é igual a

a) $\frac{6-\sqrt{3}}{3}$ b) $6\sqrt{3}-3$ c) $2\sqrt{3}-1$ d) $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

Solução:
Seja o ponto E a interseção de BC com AD temos que:
No triângulo AEC:

$$\text{tg}30° = \frac{EC}{AC} \Rightarrow EC = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$

No triângulo BED:

$$\text{sen}30° = \frac{ED}{BE} \Rightarrow ED = \frac{1}{2}\cdot\left(4-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow ED = \left(2-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Como os triângulos AEC e BED são semelhantes:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{ED}{EC} \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$\frac{\mathrm{BD}}{2} = \frac{6 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \mathrm{BD} = \frac{\left(6 - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$\mathrm{BD} = 2\sqrt{3} - 1$$

Opção B