Soluções de Questões de Matemática do Colégio Militar do Rio de Janeiro – CMRJ

Funções

1. Questão

Sendo D e D_1, respectivamente, domínios das funções reais f e g, definidas por $f(x) = \sqrt{x-1}$ e $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{-x+2}}$, podemos afirmar que $D_1 - D$ compreende os valores de x no intervalo:

a) $[-1,1]$ b) $]-1,1]$ c) $[-1,1[$ d) $[1,2[$ e) $[1,2]$

Solução:
Vamos analisar o domínio de cada função:

1) $f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow x-1 \geq 0$

Então:

$$x \geq 1$$

Logo:

$$D = [1, \infty[$$

2) $g(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{-x+2}} \Rightarrow \dfrac{x+1}{-x+2} \geq 0$

Primeiro achamos as raízes do numerador e do denominador:

Numerador:

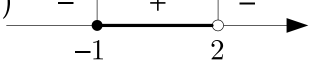
$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Denominador:

$$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

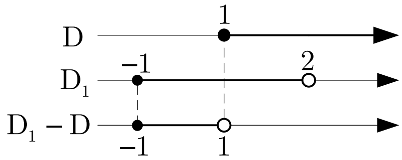
Fazendo um quadro de sinais

	-1		2	
$x+1$	$-$	$+$		$+$
$-x+2$	$+$	$+$		$-$
$g(x)$	$-$	$+$		$-$



Logo $D_1 = [-1, 2[$

Representando os intervalos:



Portanto, $D_1 - D$ é o intervalo $[-1,1[$.

Opção C

2. Questão

O domínio, em $\mathbb{R}$, da função real definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^a + (6 + x - x^2)^b$, onde $a = \frac{1}{2}$ e $b = -\frac{1}{2}$, é:

a) $\{-1, 0, 1, 2\}$ b) $]2, 3[$ c) $[1, 2]$ d) $]-2, 1] \cup [2, 3[$ e) $[-1, 1] \cup \{2\}$

Solução:
Reescrevendo a função, substituindo os valores de a e b:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{\frac{1}{6 + x - x^2}}$$

Dados os valores de **a** e **b**, o que queremos de fato é que:

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

E

$$\frac{1}{6 + x - x^2} \geq 0$$

Para $x^2 - 3x + 2 = 0$, encontramos raízes 1 e 2. Para $6 + x - x^2 = 0$, temos raízes -2 e 3. Assim, fazendo um quadro de sinais:

		-2		1		2		3	
$x^2 - 3x + 2$	+		+		−		+		+
$6 + x - x^2$	−		+		+		+		−
		○	———	●		●	———	○	

A função só vai existir onde as expressões forem simultaneamente satisfeitas, ou seja, onde ambas são positivas ou nulas (excluindo-se o caso em que a expressão está no denominador).

Opção D

3. Questão

O lucro L de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 8x - 7$, onde x é a quantidade vendida. O lucro será positivo se, e somente se:

a) $2 < x < 5$
b) $x > 7$ ou $x < 1$
c) $0 < x < 12$
d) $x > 12$
e) $1 < x < 7$

Solução:
Como queremos lucro positivo:

$$-x^2 + 8x - 7 > 0$$

Então:

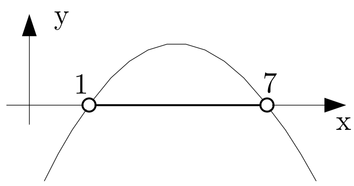
$$\Delta = 64 - 4 \cdot (-1) \cdot (-7)$$
$$\Delta = 36$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{36}}{2\cdot(-1)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-8+6}{-2} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-8-6}{-2} \Rightarrow x_2 = 7 \end{cases}$$

Como a função é uma parábola, ela terá valores positivos para valores de x entre as raízes, ou seja,

$$1 < x < 7$$

Veja o gráfico:



Opção E

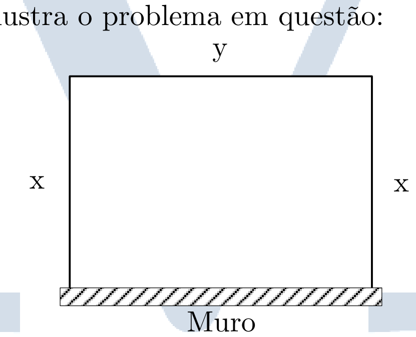
4. Questão

Um jardineiro possui 36 m de tela e quer construir um cercado retangular, apoiando as extremidades da tela em parte de um muro já existente. Qual deve ser a medida do maior lado desse cercado, sabendo que o jardineiro quer cercar a maior área possível?

a) 20 b) 18 c) 16 d) 9 e) 8

Solução:

Veja a figura abaixo, que ilustra o problema em questão:



A área **z** do cercado de acordo com esta figura é dada por:

$$z = xy$$

Do enunciado sabemos que:

$$2x + y = 36$$

Isolando y:

$$y = 36 - 2x$$

Recalculando z:

$$z = x\underbrace{(36-2x)}_{y}$$

Então temos a seguinte função:

$$z = -2x^2 + 36x$$

Calculando o valor máximo (ordenada do vértice) teremos a **área máxima**:

$$z_{Máx} = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$z_{Máx} = -\frac{36^2 - 4\cdot(-2)\cdot 0}{4\cdot(-2)} \Rightarrow z_{Máx} = \frac{36\cdot 36}{4\cdot 2} \Rightarrow z_{Máx} = 162 \text{ m}^2$$

Como queremos o maior lado possível, encontramos a abscissa do vértice:

$$x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{36}{-2\cdot 2} \Rightarrow x_v = 9$$

Calculando o valor de y:

$$y = 36 - 2\cdot 9 \Rightarrow y = 18$$

Opção B

5. Questão

Seja f uma função na qual cada número real x está associado ao menor elemento do conjunto $C = \{x+1, -x+5, x^2-1\}$. O conjunto imagem dessa função f é:

a) $]-\infty, 3]$ b) $[-1, \infty[$ c) $]-\infty, 2]$ d) $]-\infty, 0]$ e) $\{y \in \mathbb{Z} \mid y \leq 3\}$

Solução:

A função f associa a cada x o menor valor encontrado quando substituímos o valor numérico de x nos elementos do conjunto C. Por exemplo, para $x = 0$ teremos:

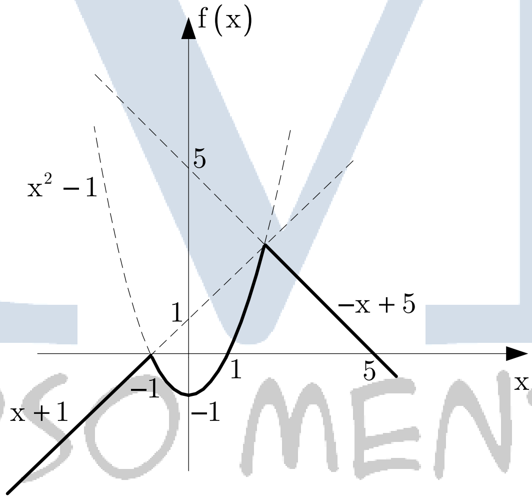
$$C = \{0+1, -0+5, 0^2-1\}$$

$$C = \{1, 5, -1\}$$

Isso quer dizer que:

$$f(0) = -1$$

Para facilitar a visualização da imagem faremos o gráfico de f, baseando-se em cada elemento do conjunto C:



A curva mais espessa representa a função **f** e o tracejado representa a curva original, ou seja, o **elemento de C que gerou a curva da função f**. Repare que a curva em destaque sempre dá o menor valor possível para cada x usado. Veja que $f(0) = -1$, confirmando nossa previsão.

Para determinarmos a imagem, é preciso encontrar o ponto de interseção das três curvas. Então:

$$\textbf{1)}\ x^2 - 1 = -x + 5$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4\cdot(1)\cdot(-6)$$

$$\Delta = 25$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1+5}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \\ x_2 = \frac{-1-5}{2} \Rightarrow x_2 = -3 \end{cases}$$

2) $x^2 - 1 = x + 1$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (-2)$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1+3}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 2} \\ x_2 = \frac{1-3}{2} \Rightarrow x_2 = -1 \end{cases}$$

Portanto, verificamos que a abscissa do encontro das três “curvas” é 2. O valor da imagem é:

$$C = \{2+1, -2+5, 2^2 - 1\} \Rightarrow C = \{3,3,3\}$$

A imagem é a projeção da curva sobre o eixo y. O valor máximo de f é 3, então:

$$Im_f =]-\infty, 3]$$

Opção A

Porcentagem

6. Questão

A prefeitura de um Município multou a companhia de papéis e sucatas local em R$ 3.850,00, por poluição do meio ambiente. Se o pagamento não for efetuado até o próximo dia 20 de novembro, haverá um acréscimo de 20% desse valor, mais juros simples por dia de atraso, calculados sobre o novo valor da multa à taxa de 12% ao mês.

Assim sendo, caso só liquide esta dívida no dia 30 de novembro corrente, a fábrica deverá pagar:

a) R$ 4.635,40
b) R$ 4.804,80
c) R$ 5.082,00
d) R$ 6.468,00
e) R$ 10.164,00

Solução:

Primeiro vamos calcular a “multa” fixa M:

$$M = 0,2 \cdot 3850 \Rightarrow M = 770,00$$

A nova multa será:

$$3850 + 770 = 4620,00$$

Com a dívida sendo paga no dia 30 de novembro, serão 10 dias de atraso, calculando os juros J:

$$J = \frac{12}{100} \cdot (3850 + 770) \cdot \frac{10}{30}$$

Lembrando que o tempo deve estar em **meses**, uma vez que a taxa de juros está com esta mesma unidade de tempo.

$$J = \frac{12}{100} \cdot 4620 \cdot \frac{10}{30}$$
$$J = 184,80$$

Somando tudo:

$$T = 4620 + 184,80 \Rightarrow T = 4804,80$$

Opção B

7. Questão

Um capital C foi aplicado a juros simples, durante um ano e seis meses, da seguinte maneira:

50% do capital foram aplicados a 4% ao ano, $\frac{1}{3}$ foi aplicado a 10% ao ano e o restante foi aplicado a i% ao ano. Se o rendimento total obtido ao término do prazo foi 10,5% do capital aplicado, então o valor de i é:

a) 8% b) 10% c) 12% d)14% e) 16%

Solução:

Por etapas:

— 50% do capital foram aplicados a 4% ao ano (tempo em anos):

$$C_1 = 0,5C + 0,5C \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{C}{2} + \frac{C}{2} \cdot \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = \frac{C}{2} + \frac{3C}{100}$$

— $\frac{1}{3}$ foi aplicado a 10% ao ano:

$$C_2 = \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}C \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{C}{3} + \frac{C}{3} \cdot \frac{10}{100} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{C}{3} + \frac{10C}{200}$$

Sobrou 1/6 para ser aplicado:

$$C_3 = \frac{1}{6}C + \frac{1}{6}C \cdot \frac{i}{100} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_3 = \frac{C}{6} + \frac{C}{6} \cdot \frac{i}{100} \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow C_3 = \frac{C}{6} + \frac{iC}{400}$$

Somando:

$$C_T = C_1 + C_2 + C_3$$

Como o total geral foi de um rendimento de 10,5%:

$$C + \frac{10,5}{100}C = \frac{C}{2} + \frac{3C}{100} + \frac{C}{3} + \frac{10C}{200} + \frac{C}{6} + \frac{iC}{400}$$

Então:

$$1 + \frac{10,5}{100} = \frac{1}{2} + \frac{3}{100} + \frac{1}{3} + \frac{10}{200} + \frac{1}{6} + \frac{i}{400}$$
$$\frac{10,5}{100} = \frac{3}{100} + \frac{10}{200} + \frac{i}{400}$$
$$42 = 12 + 20 + i$$
$$i = 10$$

Opção B

Conjuntos

8. Questão

Se $A = \{1, \{9\}, 9, 2\}$, assinale a afirmação **errada**:

a) $1 \in A$ b) $9 \in A$ c) $\{9\} \in A$ d) $\{9\} \subset A$ e) $2 \subset A$

Solução:
Para solucionar esta questão precisamos entender o conceito de subconjunto e, além disso, quando se deve utilizar a pertinência ou a relação de inclusão.
i) Se todos os elementos de um conjunto são também elementos de outro conjunto, então o primeiro é subconjunto do segundo.
ii) A relação de inclusão só pode ser usada **entre conjuntos**.
iii) A relação de pertinência só é usada **entre elemento e conjunto**.
Feita esta observação, a opção correta (afirmativa falsa) é a letra E.
Observação: Note que tanto a opção **C** quanto a **D** são corretas. O conjunto unitário $\{9\}$ é elemento de A, bem como um conjunto qualquer $\{9\}$ também é subconjunto de A.

Basta, para entendermos melhor, escrevermos todos os subconjuntos possíveis de A, chamados de partes de A:

$$P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{\{9\}\},\{9\},\{2\},\{1,\{9\}\},\{1,9\},\{1,2\},\{\{9\},9\},\{\{9\},2\},\{1,\{9\},9\},\{1,\{9\},2\},$$
$$\{\{9\},9,2\},\{1,9,2\},\{1,\{9\},9,2\}\}$$

Opção E

9. Questão

Sendo $M=\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, podemos afirmar que:

a) $\{a\}\subset M$ b) $\{a\}\in M$ c) $\{a\}\cap\{b\}\not\subset M$ d) $a\in M$ e) $\{a\}\cup\{b\}\subset M$

Solução:
Aqui a única dúvida é em relação às opções **A** e **E.** Para maiores detalhes, vide a Questão 8. A opção correta é a B, pois a relação de inclusão só é usada entre conjuntos.

Opção B

10. Questão

Sejam A e B conjuntos quaisquer. $A\cup B=A\cap B$, se e somente se:
a) $A=\varnothing$ b) $A\supset B$ c) $A\not\subset B$ d) $A\supset B$ ou $B\supset A$ e) $A\subset B$ e $B\subset A$

Solução:
Vamos analisar cada alternativa em separado:
A) **Falsa.** Com $A=\varnothing$ teremos $A\cup B=B$ e $A\cap B=\varnothing$, portanto $A\cup B=A\cap B$ somente se $B=\varnothing$.
B) **Falsa.** Com $A\supset B$ teremos $A\cup B=B$ e $A\cap B=A$, portanto $A\cup B=A\cap B$ somente se $B=A$.
C) **Falsa.** Com $A\not\subset B$ teremos $A\cup B=C$ e $A\cap B=D$, portanto $A\cup B=A\cap B$ somente se $C=D$.
D) **Falsa.** Com $A\supset B$ teremos $A\cup B=B$ e $A\cap B=A$, portanto $A\cup B=A\cap B$ somente se $B=A$. Com $B\subset A$ teremos $A\cup B=A$ e $A\cap B=B$, portanto $A\cup B=A\cap B$ somente se $B=A$.
E) **Verdadeira.** Com $A\supset B$ e $B\subset A$ teremos obrigatoriamente que $B=A$.

Opção E

11. Questão

Relativamente aos intervalos reais $A=]-3,1[$, $B=]1,4]$, $C=[-1,3]$ e $D=[-3,2[$. São feitas as seguintes afirmativas:

I. $(B \cap C) \cap (A \cup D) =]1, 2[$

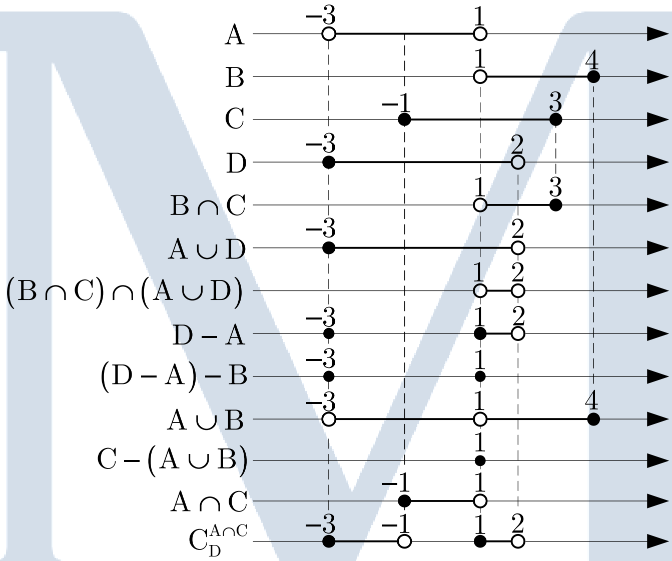
II. $(D - A) - B = \{-3, 1\}$

III. $C - (A \cup B) = \{1\}$

IV. $C_D^{(A \cap C)} = [-3, -1[\cup [1, 2[$

Pode-se, então, afirmar que:
a) Todas as afirmativas estão corretas.
b) Apenas três das afirmativas dadas estão corretas.
c) Apenas duas das afirmativas dadas estão corretas.
d) Apenas uma das afirmativas dadas está correta.
e) Todas as afirmativas estão erradas.

Solução:
Para solucionar esta questão, representamos os intervalos dados e realizamos as operações citadas para verificar se o item é falso ou verdadeiro, veja:



Observando a figura acima vemos que todas as afirmativas são verdadeiras.

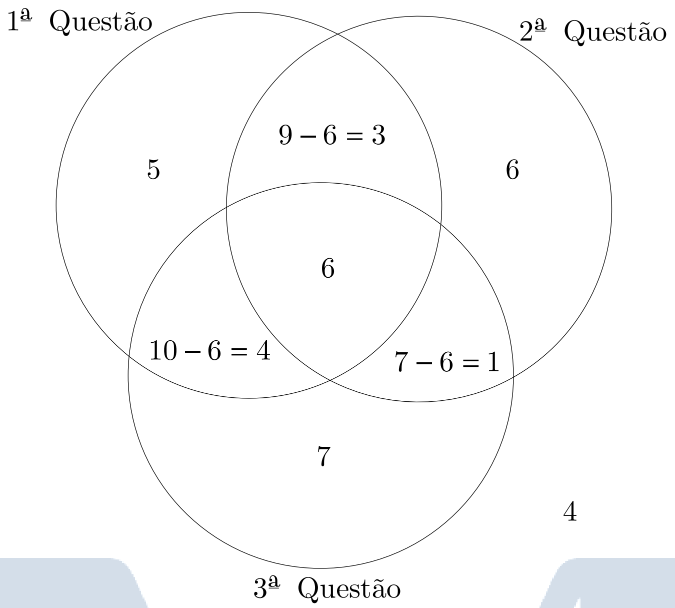
Opção A

12. Questão

Os alunos de uma turma fizeram uma prova de 3 questões. Sabe-se que 4 alunos erraram todas as questões; 5 só acertaram a primeira questão; 6 só acertaram a segunda. 7 só acertaram a terceira, 9 acertaram a primeira e a segunda; 10 acertaram a primeira e a terceira, 7 acertaram a segunda e a terceira e 6 acertaram todas as questões. O número de alunos dessa turma é:

a) 28 b) 34 c) 36 d) 50 e) 54

Solução:
Vamos colocar os dados em um diagrama de Venn:



Somando todos os valores:

$$S = 6 + 4 + 3 + 7 + 1 + 5 + 6 + 4$$
$$S = 36$$

Opção C