Soluções de Questões de Matemática CEFET/RJ

22 de outubro

2010

Esta apostila contém soluções comentadas das questões de matemática de provas de seleção para o Ensino Médio no Centro Federal de Educação Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ

CEFET/RJ
Ensino Médio

Curso Mentor

Soluções de Questões de Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca – CEFET/RJ

Prova 2010

Questão 11

Manuela dividiu um segmento de reta em cinco partes iguais e depois marcou as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ nas extremidades, conforme a figura abaixo. Em qual dos pontos Manuela deverá assinalar a fração $\frac{2}{5}$?

a) A b) B c) C d) D

Solução:
Como o segmento está dividido em 5 partes iguais, teremos que:

$$\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{5}=\frac{\frac{1}{6}}{5}=\frac{1}{30}$$

Portanto cada segmento vale $\frac{1}{30}$.

Como queremos chegar a $\frac{2}{5}$:

$$\frac{1}{3}+x\cdot\frac{1}{30}=\frac{2}{5}$$

Onde x é o número de segmentos usados, daí:

$$\frac{10+x}{30}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{10+x}{6}=\frac{2}{1}\Rightarrow 10+x=12$$

$$x=2$$

São usados dois segmentos, ou seja, Manuela deve marcar no ponto B.

Opção B

Enunciado comum às questões 12 e 13.

Passados setenta anos da morte do compositor Noel Rosa, 120 músicas de sua discografia, acabam de cair em domínio público.

Depois de um colossal trabalho de pesquisa e restauração sonora, um professor paulistano de biologia reuniu toda a obra do Poeta da Vila em uma caixa com 14 CDs, assim distribuídos: 4 CDs com 14 músicas, 2 CDs com 15 músicas, 3 CDs com 16 músicas, 3 CDs com 17 músicas, 1 CD com 20 músicas e 1 CD com 25 músicas. Considere esse total de 230 músicas, onde não há músicas que estejam em mais de um CD.

Questão 12

Qual é, aproximadamente, a média de músicas por CD?

a) 16,4 b) 17,8 c) 18,6 d) 19,2

Solução:

Como queremos a média de músicas "m" por CD basta fazer:

$$m = \frac{\text{Total de Músicas}}{\text{Total de CD's}}$$

Então:

$$m = \frac{230}{14} \Rightarrow m \cong 16,4$$

Opção A

Questão 13

Quantas músicas mais, no mínimo, deverão cair em domínio público até que o percentual de músicas da obra de Noel Rosa nessa situação, ultrapasse 70% de sua obra?

a) 34 b) 38 c) 42 d) 45

Solução:

Queremos saber quantas músicas no mínimo, somadas às 120 já em domínio público, perfazem um total maior do que 70% das 230 músicas, ou seja:

$$120 + x > \frac{70}{100} \cdot 230$$
$$120 + x > 7 \cdot 23$$
$$x > 41$$

Logo $x = 42$.

Opção C

Questão 14

Qual, dentre as opções abaixo, equivale a $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$?

a) $-3+\sqrt{2}$ b) $-1,5+\sqrt{2}$ c) $1+\sqrt{2}$ d) $2+\sqrt{2}$

Solução 1:

Um radical duplo pode ser transformado em um radical simples por meio da expressão:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\text{Onde } C = \sqrt{A^2 - B}$$

Então:

$$C = \sqrt{9-8} \Rightarrow C = 1$$

Portanto:

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}}$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1$$

Solução 2:

Todas as opções contém o radical $\sqrt{2}$, portanto a resposta será do tipo $x+\sqrt{2}$. Elevando $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ao quadrado:

$$3+2\sqrt{2}=\left(x+\sqrt{2}\right)^2$$

Desenvolvendo:

$$3+2\sqrt{2}=x^2+2\sqrt{2}x+2$$

Separando esta equação em parte irracional e parte racional teremos:

$$3+2\sqrt{2}=\left(x^2+2\right)+\left(2\sqrt{2}x\right)$$

Igualando as partes irracionais de ambos os lados:

$$2\sqrt{2}x=2\sqrt{2}\Rightarrow x=1$$

O que soluciona nossa equação.

Opção C

Questão 15

João, Pedro e Carlos são atletas. João tem 16 anos e joga vôlei, Pedro tem 17 anos e joga basquete e Carlos tem 15 anos e joga futebol. Considere que uma pessoa alta tem mais de 1,80 m de altura e que somente uma das afirmativas abaixo é verdadeira.

1 — Exatamente um dos rapazes é alto.
2 — Exatamente dois dos rapazes mencionados são altos.
3 — Exatamente três dos rapazes mencionados são altos.
4 — Pelo menos dois dos rapazes mencionados são altos.

A soma dos números dos itens cujas afirmações são falsas é:

a) 1 b) 2 c) 8 d) 9

Solução:

Se as afirmativas **2** ou **3** forem verdadeiras, a **4** automaticamente também o será, logo **2 e 3 são falsas**. E, caso a **4** fosse verdadeira, não teríamos a soma das falsas como resposta (soma 6).

Assim a afirmativa correta é **1** e a soma das falsas vale 9.

Opção D

Questão 16

O elevador panorâmico do Cantagalo pode transportar 12 adultos ou 20 crianças. Qual o maior número de crianças que poderia ser transportadas com 9 adultos?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

Solução:

Fazendo uma regra de três simples teremos:

12 adultos — 20 crianças

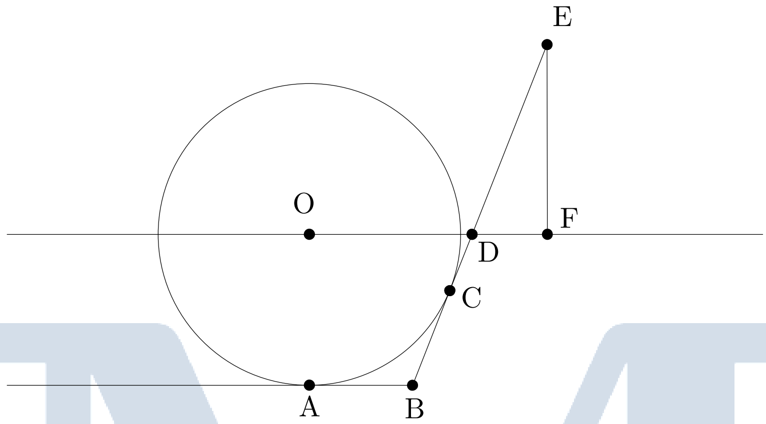
3 adultos — x crianças

$12x=60\Rightarrow x=5$ crianças

Opção C

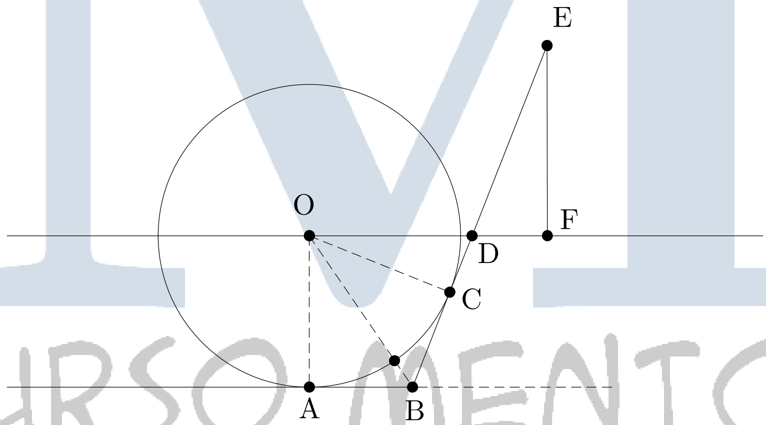
Questão 17

Na figura abaixo, **O** é o centro de uma circunferência que tangencia a semi-reta **BA** no ponto **A** e tangencia o segmento **BE** no ponto **C**. Sabendo ainda que **BA** é paralela a reta **OF**, que o segmento **EF** é perpendicular a **OF** e que o menor arco da circunferência com extremidades em **A** e **B** mede **60°**, podemos afirmar que o ângulo **F$\hat{E}$D** mede:



a) 20° b) 30° c) 50° d) 60°

Solução:
Traçando os segmentos AO, OB e OC temos a seguinte figura:



Como $AB // OD$ e $O\hat{A}B = 90°$, pois é ponto de tangência, ABDO é um trapézio retângulo, ou seja, $A\hat{O}D = 90°$.

A e C são pontos de tangência, logo, $AB = BC$ e OB é bissetriz do ângulo $A\hat{O}C$. DO enunciado sabe-se que $AC = 60°$, então $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = 30°$.

O triângulo COD é retângulo em C, portanto $O\hat{D}C = E\hat{D}F = 60°$. Sabemos, do enunciado, que EF é perpendicular a OD, logo $D\hat{E}F = 30°$.

Opção B

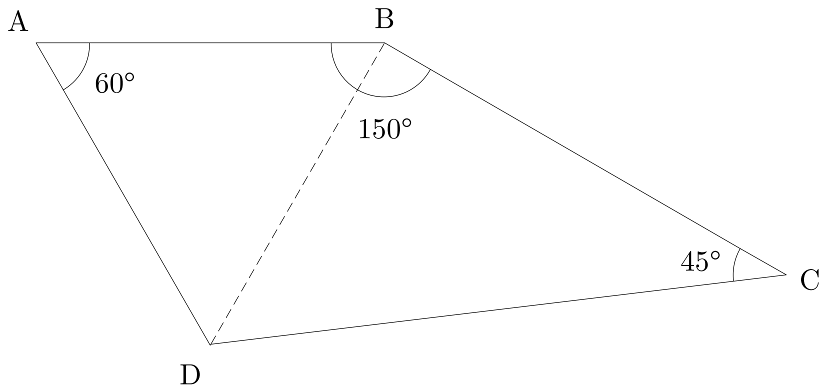
Questão 18

Se **ABCD** é um quadrilátero tal que $AB = AD$, $B\hat{A}D = 60°$, $A\hat{B}C = 150°$ e $B\hat{C}D = 45°$, podemos afirmar que:

a) $CD = AB$ b) $CD = \sqrt{2}BC$ c) $CD < AD$ d) $CD - BD < 0$

Solução:

Fazendo a figura do enunciado:



Como $AB = AD$ e $B\hat{A}D = 60°$, temos que o triângulo ABD é equilátero. Assim $A\hat{B}D = 60°$ e $D\hat{B}C = 90°$. Fazendo $AB = x$:

$$AB = AD = BD = BC = x$$

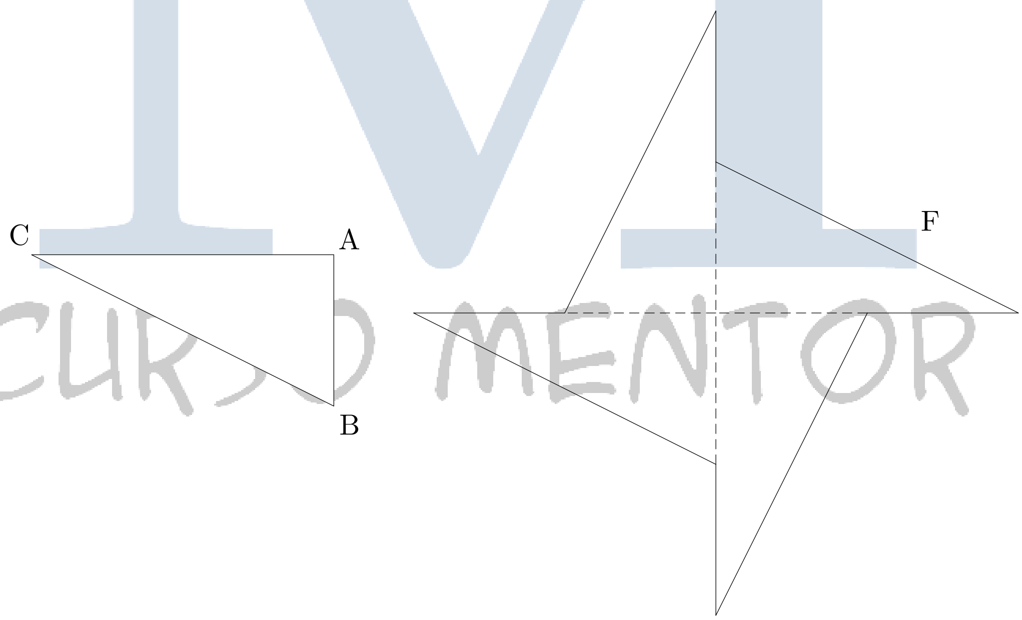
Sabemos que BCD é retângulo, então:

$$DC = \sqrt{x^2 + x^2} \Rightarrow DC = x\sqrt{2}$$

Opção B

Questão 19

Abaixo temos um triângulo retângulo **ABC** e uma figura **F** composta por quatro triângulos congruentes a **ABC**. Considerando que $BC = 8$ cm e $3AC = 4AB$, qual é o a perímetro da figura **F**?



a) 36,0 cm b) 36,4 cm c) 38,0 cm d) 38,4 cm

Solução:

De acordo com a figura F, os lados são:

$$BC,\ AC - AB$$

Do enunciado temos que $3AC = 4AB$. Podemos então calcular os lados do triângulo ABC, usando o teorema de Pitágoras:

$$8^2 = AC^2 + \left(\frac{3}{4}AC\right)^2$$

Daí:

$$8^2 = \frac{16AC^2 + 9AC^2}{16}$$

$$AC^2 = \frac{64 \cdot 16}{25} \Rightarrow AC = \frac{32}{5} \text{ cm}$$

Calculando AB:

$$AB = \frac{3}{4}AC \Rightarrow AB = \frac{3}{4} \cdot \frac{32}{5} \Rightarrow AB = \frac{24}{5} \text{ cm}$$

O perímetro 2p da figura F será então:

$$2p = 4BC + 4(AC - AB)$$

Substituindo os valores anteriores:

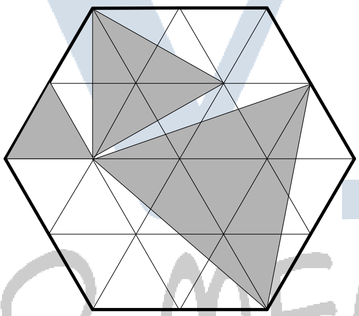
$$2p = 4 \cdot 8 + 4 \cdot \left(\frac{32 - 24}{5}\right) \Rightarrow 2p = 32 + \frac{32}{5}$$

$$2p = 32 + 6,4 \Rightarrow 2p = 38,4 \text{ cm}$$

Opção D

Questão 20

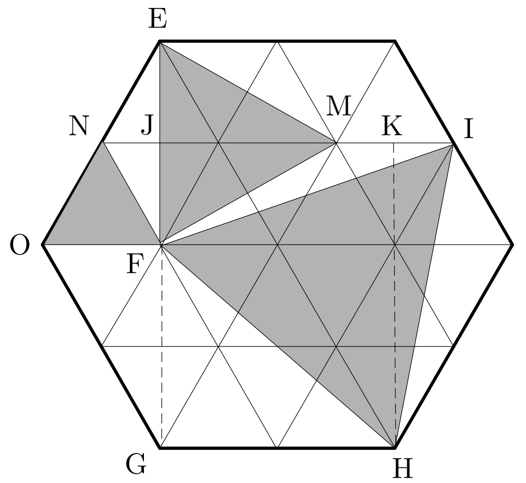
A figura abaixo consta de um hexágono formado por **24** triângulos equiláteros de lado **1**. A área sombreada é formada por três triângulos equiláteros de tamanhos distintos entre si. Se **S** é a área sombreada e **B** é a área não sombreada do hexágono, o valor de $\frac{B}{S}$ é:



a) $\frac{11}{24}$ b) $\frac{15}{24}$ c) $\frac{9}{11}$ d) $\frac{13}{11}$

Solução:

Vamos dar uma ampliada na figura para podermos nomear alguns pontos:



1) O triângulo NOF é equilátero de lado 1 – vide enunciado – logo sua área será:

$$S_{NOF} = \frac{1^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_{NOF} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

2) Vamos calcular a área do triângulo EMF. A altura JM vale:

$$JM = \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow JM = \frac{3}{2}$$

A base EF vale:

$$EF = 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EF = \sqrt{3}$$

Logo a área do triângulo EMF será:

$$S_{EMF} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} \Rightarrow S_{EMF} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Observação: Uma análise mais cuidadosa mostra que EMF é equilátero, basta olhar os ângulos internos.

3) Falta apenas calcular agora a área do triângulo IFH. Calculando IF:

$$IF^2 = IJ^2 + JF^2 \Rightarrow IF = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{25}{4}} \Rightarrow IF = \sqrt{7}$$

Calculando IH:

$$IH^2 = IK^2 + HK^2 \Rightarrow IH = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{27}{4}} \Rightarrow IH = \sqrt{7}$$

Calculando FH:

$$FH^2 = FG^2 + FH^2 \Rightarrow FH = \sqrt{3+4} \Rightarrow FH = \sqrt{7}$$

A área do triângulo IFH é:

$$S_{SFH} = \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

4) Calculando a área S teremos:

$$S = S_{NOF} + S_{EMF} + S_{IFH}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{(1+3+7)\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = \frac{11\sqrt{3}}{4}$$

5) A área B é a diferença entre a área do hexágono maior e a área sombreada S:

$$B = 24 \cdot \frac{1^2\sqrt{3}}{4} - \frac{11\sqrt{3}}{4} \Rightarrow B = \frac{13\sqrt{3}}{4}$$

Calculando $\frac{B}{S}$:

$$\frac{B}{S} = \frac{\frac{13\sqrt{3}}{4}}{\frac{11\sqrt{3}}{4}} \Rightarrow \frac{B}{S} = \frac{13}{11}$$

Opção D

Sistemas de Numeração

1. Questão

No sistema de numeração de base 2, o numeral mais simples de 23 é:

a) 11101 b) 10111 c) 1100 d) 1001 e) 11

Solução:

Para passar um número qualquer da base 10 para a base 2 dividimos o mesmo por 2 sucessivamente até encontrar quociente igual a 1:

$$\begin{array}{r|l}
23 & 2 \\ \cline{2-2}
\mathbf{1} & 11 \;|\; 2 \\
 & \mathbf{1} \;|\; 5 \;|\; 2 \\
 & \quad \mathbf{1} \;|\; 2 \;|\; 2 \\
 & \qquad \mathbf{0} \;|\; \mathbf{1}
\end{array}$$

Lendo da direita para a esquerda começando pelo último quociente e indo até o primeiro resto obtemos o número na base 2:

$$23_{10} = 10111_2$$

Opção B

2. Questão

"O setor público registra déficit de R$ 33,091 bilhões em 1994". Se x é igual ao número de zeros dessa quantia, desprezados os zeros dos centavos, então o número x escrito no sistema binário é:

a) $10_{(2)}$ b) $100_{(2)}$ c) $101_{(2)}$ d) $110_{(2)}$ e) $111_{(2)}$

Solução:

A quantia "bilhões" pode ser representada por uma potência de 10:

$$1 \text{ bilhão} = 1.000.000.000 = 10^9$$

Assim:

$$33,091 \text{ bilhões} = 33,091 \cdot 10^9 = 33.091.000.000$$

Como são 7 zeros, precisamos passar para a base 2:

$$7_{10} = 111_2$$

Observação: Cuidado com essa questão, pois há uma "armadilha"; é preciso contar o zero entre o 3 e o 9 (33.**0**91.**000**.**000**).

Opção E

3. Questão

A tabela abaixo está escrita no sistema binário. Determine o único elemento que satisfaça a sequência.

1010	101	10	1
1011	110	11	100
1100	111	1000	1001
1101	1110	1111	

a) 10000 b) 10001 c) 10010 d) 10011 e) 10100

Solução:
O melhor caminho para esta questão talvez seja colocar cada número da tabela no sistema de base 10 e verificar mais claramente qual a regra de formação dela:

10	5	2	1
11	8	3	4
12	7	8	9
13	14	15	**16**

Opção A

Sistema Decimal de Numeração

4. Questão

No número $(11221)_3$, qual o valor relativo do algarismo que ocupa a segunda ordem quando escrito no sistema decimal?

Solução:
Para passar o número para a base 10 usamos o seguinte procedimento:

$$11221_3 = \left(1 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0\right)_{10}$$

Portanto:

$$11221_3 = 81 + 27 + 18 + 6 + 1 \Rightarrow 11221_3 = 133$$

Separando em ordens:

$$133 = 100 + 30 + 3$$

Resposta: 30

5. Questão

Escrevendo-se o algarismo 5 à direita de um certo número, ele fica aumentado de 248 unidades. Que número é esse?

Solução:
De acordo com o enunciado temos:

$$\mathrm{a}5 = \mathrm{a} + 248$$

O que nos dá:

$$10 \cdot \mathrm{a} + 5 = 200 + 40 + 8 + \mathrm{a}$$

Solucionando esta equação teremos:

$$10a - a = 248 - 5$$
$$9a = 243 \Rightarrow a = \frac{243}{9}$$
$$a = 27$$

Tirando a prova real:

$$275 = 27 + 248$$

Resposta: 27

Operações Fundamentais

6. Questão

Um dado elevador pode transportar, com segurança, no máximo, uma tonelada. Supondo-se que esse elevador esteja transportando três pessoas com 67 kg cada, seis pessoas com 75 kg cada e três pessoas com 82 kg cada, qual o número máximo de pessoas com 56 kg cada que ainda poderiam ser transportadas sem risco de sobrecarga?

Solução 1:
Somando o peso das pessoas já no elevador:

$$3 \cdot 67 + 6 \cdot 75 + 3 \cdot 82 = 201 + 450 + 246 = 897$$

O peso total já é de 897 kg. Colocando mais um passageiro de 56 kg:

$$897 + 56 = 953$$

Caso seja colocado mais um passageiro de 56 kg:

$$953 + 56 = 1009$$

O que ultrapassa uma tonelada. Portanto só é possível colocar **mais um passageiro** além dos que já estão no elevador.

Solução 2:
O problema pode ser solucionado usando inequações:

$$3 \cdot 67 + 6 \cdot 75 + 3 \cdot 82 + n \cdot 56 < 1000$$
$$201 + 450 + 246 + n \cdot 56 < 1000$$
$$56n < 1000 - 897 \Rightarrow n < \frac{103}{56}$$
$$n < 1,83$$

Como n deve ser natural seu valor é 1.

Resposta: 1

Números Primos

7. Questão

Determine três números naturais consecutivos cujo produto é 504.

Solução:
Vamos fatorar 504:

$$\begin{array}{r|c} 504 & 2 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \end{array}$$

Note que as combinações destes fatores separadas em três grupos nos darão os números possíveis. Apesar disso, nossa pesquisa será mais restrita, pois os números devem ser **consecutivos** e começando por 2 isso não será possível, pois os próximos números seriam 3 e 4, o que é impossível. Veja:

$$2 \quad 3 \quad ?$$

Com não é possível 5, passemos para 6. Há um fator para 7, mas não há fatores suficientes para fazer 8. Confira:

$$2 \cdot 3 = 6 \quad 7 \quad 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

O próximo teste é 7, 8 e 9. Que é nossa resposta.
Para que fique ainda mais claro, abaixo, listamos as possibilidades de combinações:

Parcelas da fatoração	**Números**
$2 \mid 2 \mid 2\ \ 3\ \ 3\ \ 7$	2, 2 e 126
$2 \mid 2\ \ 2 \mid 3\ \ 3\ \ 7$	2, 4 e 63
$2 \mid 2\ \ 2\ \ 3 \mid 3\ \ 7$	2, 12 e 21
$2 \mid 2\ \ 2\ \ 3\ \ 3 \mid 7$	2, 7 e 36
$2\ \ 2 \mid 2 \mid 3\ \ 3\ \ 7$	2, 4, e 63
$2\ \ 2 \mid 2\ \ 3 \mid 3\ \ 7$	4, 6 e 21
$2\ \ 2 \mid 2\ \ 3\ \ 3 \mid 7$	4, 7 e 18
$2\ \ 2\ \ 2 \mid 3 \mid 3\ \ 7$	3, 8 e 21
$\mathbf{2\ \ 2\ \ 2 \mid 3\ \ 3 \mid 7}$	**7, 8 e 9**
$2\ \ 2\ \ 2\ \ 3 \mid 3 \mid 7$	3, 7 e 24

Resposta: 7,8 e 9

8. Questão

O número de divisores do número 40 é:

a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 20

Solução:
Seja N um número qualquer cuja fatoração encontra-se abaixo:

$$N = x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot \ldots$$

O número de divisores positivos **D** de qualquer número **N** pode ser dado pela expressão:

$$D = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \ldots$$

Fatorando 40:

$$\begin{array}{r|c} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 5 \end{array}$$

O total de divisores positivos será:

$$D = (3+1) \cdot (1+1) \Rightarrow D = 8$$

Opção A

9. Questão

A soma dos dois maiores fatores primos de 120 é:

a) 9 b) 8 c) 10 d) 5 e) 7

Solução:
Fatorando 120:

$$\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ \hline 1 & 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

Daí:

$$S = 3 + 5 \Rightarrow S = 8$$

Opção B

10. Questão

Se $N = 2 \cdot 30^2$, qual o número de divisores positivos de N que são também múltiplos de 15?

Solução:
Vamos fatorar N:

$$N = 2 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 \Rightarrow N = 2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

Reescrevendo esta fatoração:

$$N = 2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \underbrace{(3 \cdot 5)}_{15}$$

Note que excluindo a parcela com resultado 15 temos:

$$D = (3+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \Rightarrow D = 16$$

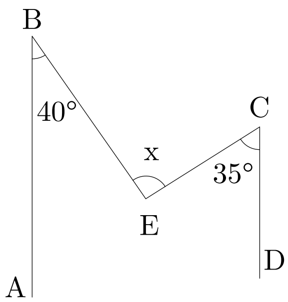
Esses 16 divisores serão obrigatoriamente múltiplos de 15, pois estão multiplicados por 15.

Resposta: 16

Ângulos

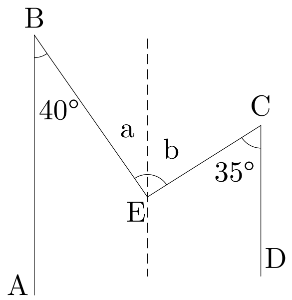
11. Questão

Na figura, $\overline{AB}$ é paralelo a $\overline{CD}$. O valor do ângulo $B\hat{E}C$ é:



a) 35° b) 40° c) 50° d) 55° e) 75°

Solução:
Traçando uma paralela auxiliar a $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ passando por E:



Usando as propriedades de duas paralelas cortadas por uma transversal, vemos que $a = 40°$ e $b = 35°$ então:

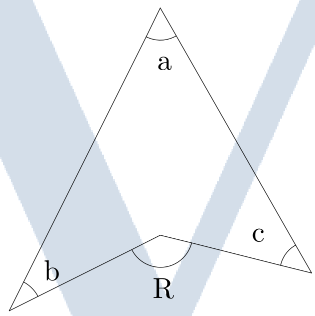
$$x = a + b \Rightarrow x = 75°$$

Opção E

Triângulos

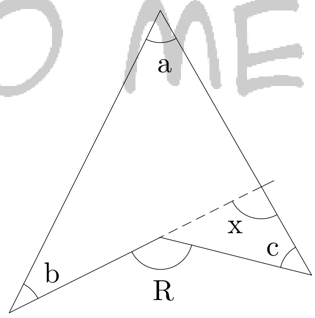
12. Questão

Considere o quadrilátero da figura abaixo e calcule a medida do ângulo x em função das medidas de a, b e c.



Solução:

Primeiro, traçamos o prolongamento de um dos lados até interceptar o outro lado:



Note que x é ângulo externo do triângulo maior, logo:

$$x = a + b$$

Pelo mesmo motivo:

$$R = x + c$$

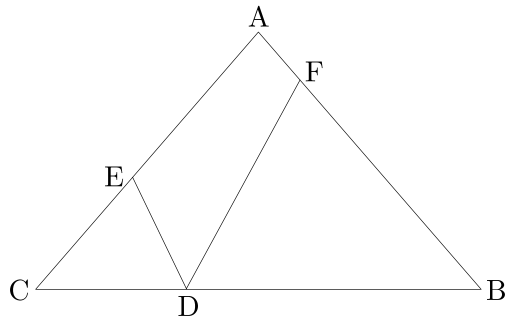
Substituindo uma equação na outra:

$$R = \underbrace{a + b}_{x} + c$$

$$R = a + b + c$$

13. Questão

No triângulo ABC, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\hat{A} = 80°$. Os pontos D, E e F estão sobre os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ respectivamente. Se $\overline{CE} = \overline{CD}$ e $\overline{BF} = \overline{BD}$, então o ângulo $E\hat{D}F$ é igual a:



a) 30° b) 40° c) 50° d) 60° e) 70°

Solução:

Como $\overline{AB} = \overline{AC}$ temos que $\hat{B} = \hat{C} = 50°$. Do enunciado temos $\overline{CE} = \overline{CD}$, logo $C\hat{E}D = C\hat{D}E = 65°$. Também do enunciado, temos $\overline{BF} = \overline{BD}$, então $B\hat{F}D = B\hat{D}F = 65°$. Olhando a figura percebemos que:

$$C\hat{D}E + B\hat{D}F + E\hat{D}F = 180°$$

Logo:

$$E\hat{D}F = 180° - 65° - 65°$$
$$E\hat{D}F = 50°$$

Opção C

14. Questão

Em qual dos polígonos convexos a soma dos ângulos internos mais a soma dos ângulos externos é de 1080°?

a) Pentágono
b) Hexágono
c) Heptágono
d) Octógono
e) Eneágono

Solução:

A soma dos ângulos internos de um polígono convexo é dada pela expressão:

$$S_i = 180° \cdot (n - 2)$$

A soma dos ângulos externos é dada por:

$$S_e = 360°$$

Do enunciado:

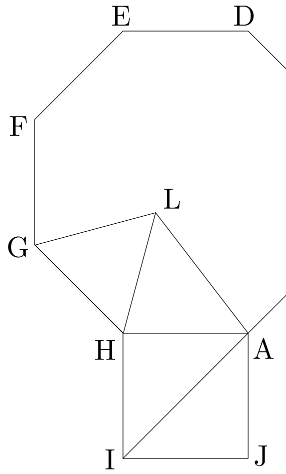
$$S_i + S_e = 1080°$$
$$180°(n - 2) + 360° = 1080°$$
$$180° \cdot n - 360° + 360° = 1080°$$
$$n = \frac{1080°}{180°} \Rightarrow n = 6$$

O polígono tem 6 lados, logo é o hexágono.

Opção B

15. Questão

Os polígonos ABCDEFGH, GHL e AHIJ são regulares. Calcule o ângulo $L\hat{A}I$.



Solução:

Como GHL é equilátero temos $G\hat{H}L = 60°$. Calculando o ângulo interno do octógono:

$$a_i = \frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow a_i = \frac{180 \cdot 6}{8}$$

$$a_i = 135°$$

Calculando então o ângulo $L\hat{H}A$:

$$L\hat{H}A = 135° - 60°$$

$$L\hat{H}A = 75°$$

Observando o triângulo AHL, temos:

$$AH = HL$$

Portanto:

$$H\hat{A}L = A\hat{L}H = \frac{105°}{2}$$

O triângulo IHA é retângulo em H e isósceles ($IH = AH$), o que nos dá:

$$I\hat{A}H = 45°$$

Da figura:

$$L\hat{A}I = I\hat{A}H + H\hat{A}L$$

$$L\hat{A}I = 45° + \frac{105°}{2} \Rightarrow L\hat{A}I = \frac{195°}{2}$$

$$L\hat{A}I = 97,5° \text{ ou } L\hat{A}I = 97°\ 30'$$

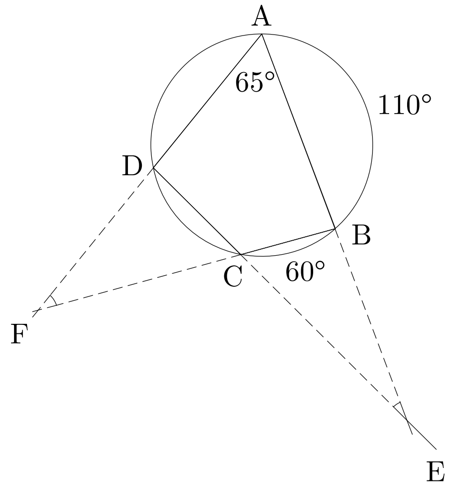
Círculo

16. Questão

Num círculo tomam-se, no mesmo sentido de percurso, os arcos $\overparen{AB} = 110°$, $\overparen{BC} = 60°$ e $\overparen{CD}$. Sabendo-se que o ângulo $B\hat{A}D = 65°$, determine a soma dos ângulos $\hat{E}$ e $\hat{F}$ formados respectivamente, pelos prolongamentos das cordas $\overline{AB}$ e $\overline{DC}$ e das cordas $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.

Solução:

Façamos primeiro a figura do enunciado:



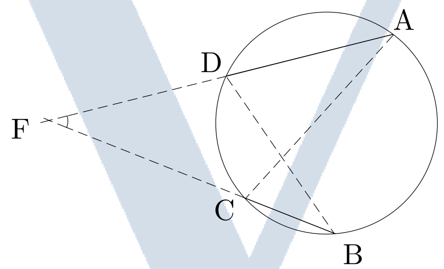
Como $B\hat{A}D = 65°$ o arco $\overset{\frown}{BD}$ vale 130°, portanto o arco $\overset{\frown}{CD}$ vale 70°. A partir disso:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 360°$$

$$\overset{\frown}{AB} + 110° + 60° + 70° = 360°$$

$$\overset{\frown}{AB} = 360° - 240° \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 120°$$

Para calcular os ângulos em E e F devemos lembrar do que segue abaixo:



Seja o triângulo ACF. O ângulo em A é metade do arco CD:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$

Olhando agora para o ângulo externo em C teremos:

$$A\hat{C}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

Usando o ângulo externo em C do triângulo ACF:

$$\hat{F} + \hat{A} = A\hat{C}B$$

Então:

$$\hat{F} + \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow \hat{F} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$\hat{F} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

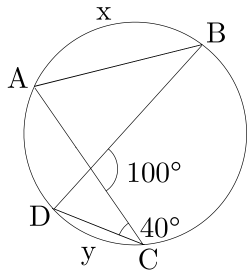
Usando este resultado no problema:

$$\hat{F} + \hat{E} = \frac{110° - 70°}{2} + \frac{120° - 60°}{2}$$

$$\hat{F} + \hat{E} = 50°$$

17. Questão

Sendo $\overset{\frown}{AB} = x$ e $\overset{\frown}{CD} = y$, o valor de $x + y$ é:



a) 90° b) 120° c) 140° d) 150° e) 160°

Solução:
O arco $\overset{\frown}{AD}$ vale:

$$\overset{\frown}{AD} = A\hat{C}D \cdot 2 \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = 80°$$

$\overset{\frown}{AD}$ é subentendido pelo ângulo $A\hat{B}D$:

$$A\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AD}}{2} \Rightarrow A\hat{B}D = 40°$$

Sendo E a interseção das cordas, a soma dos ângulos do triângulo ABE:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{E} = 180° \Rightarrow \hat{A} + 40° + 80° = 180°$$
$$\hat{A} = 60°$$

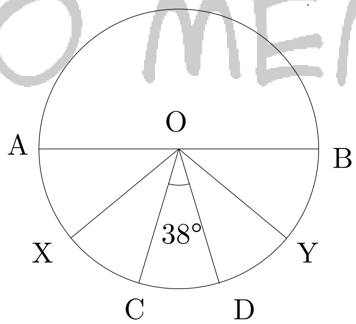
Somando todos os arcos:

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA} = 360°$$
$$x + 120° + y + 80° = 360°$$
$$x + y = 160°$$

Opção E

18. Questão

Na figura, AB é o diâmetro da circunferência de centro O; OX e OY são respectivamente bissetrizes de $A\hat{O}C$ e $B\hat{O}D$. Desta forma $X\hat{O}Y$ mede:



a) 76° b) 96° c) 109° d) 138° e) 181°

Solução:
Do enunciado temos que:

$$X\hat{O}C = \frac{A\hat{O}C}{2} \text{ e } Y\hat{O}D = \frac{B\hat{O}D}{2}$$

Podemos então escrever a soma:

$$\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DB} = 180°$$

$$2X\hat{O}C + 2Y\hat{O}D + 38° = 180°$$
$$X\hat{O}C + Y\hat{O}D = 71°$$

Somando 38°:

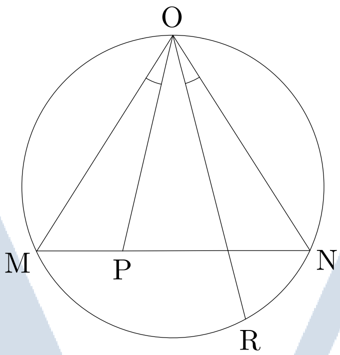
$$X\hat{O}Y = 109°$$

Opção C

Linhas Proporcionais

19. Questão

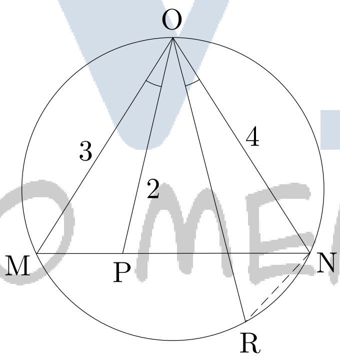
Considere a figura abaixo:



Se $M\hat{O}P = N\hat{O}R$, $\overline{OM} = 3$ cm, $\overline{OP} = 2$ cm e $\overline{ON} = 4$ cm, determine a medida de $\overline{OR}$.

Solução:

Traçando o segmento RN vemos que os ângulos $O\hat{M}P$ e $O\hat{R}N$ são congruentes, pois subentendem o mesmo arco $\overset{\frown}{ON}$:



Como os triângulos OMP e ORN têm dois ângulos iguais, eles são semelhantes (pelo caso AAA). Podemos então escrever:

$$\frac{OP}{ON} = \frac{OM}{OR}$$
$$\frac{2}{4} = \frac{3}{OR} \Rightarrow OR = 6$$

O segmento OR vale, então, 6 cm.

20. Questão

Considerando as afirmações:

i. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

ii. $\frac{1}{0}=1$

iii. $\frac{0}{0}=0$

iv. $\frac{2a+2b}{2}=a+2b$

v. $-5<-6$

vi. $\sqrt[4]{a^2\times b^2}=b\sqrt{a}$

Transcrever para o caderno de respostas a opção correta:

a) Todas são falsas.
b) Apenas uma é verdadeira.
c) Apenas duas são verdadeiras.
d) Apenas três são verdadeiras.
e) Existem exatamente quatro verdadeiras.

Solução:
Vamos analisar cada afirmação:

Falsa, pois $\sqrt{2^2+3^2}\neq 2+3\Rightarrow\sqrt{13}\neq 5$.
Falsa, a divisão de um número não nulo por zero é impossível.
Falsa, a divisão de zero por zero é indeterminada.
Falsa, basta um contra-exemplo $\frac{2\cdot 1+2\cdot 2}{2}\neq 1+2\cdot 2\Rightarrow 3\neq 5$.
Falsa, quanto mais próximo de zero, maior é o número negativo.
Falsa, desenvolvendo a expressão temos:

$$\sqrt[4]{a^2\times b^2}=a^{\frac{1}{2}}\cdot b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{ab}$$

Opção A

21. Questão

Calcule o valor da expressão $\left[\sqrt{0,25}+4(0,5)^4+(8)^{-\frac{2}{3}}\right]+2^0$.

Solução:
Calculando o valor:

$$\left[\sqrt{0,25}+4(0,5)^4+(8)^{-\frac{2}{3}}\right]+2^0$$

$$=\left[\sqrt{\frac{25}{100}}+4\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right]+1$$

$$=\left[\frac{5}{10}+4\left(\frac{1}{16}\right)+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2\right]+1$$

$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+1$$
$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+1$$
$$=1+1$$
$$=2$$

22. Questão

Qual o valor da expressão: $\dfrac{0,1333...+0,2}{\dfrac{1}{1,2}}+25^{-\frac{1}{2}}$?

Solução:
Desenvolvendo a expressão obtemos:

$$\frac{0,1333...+0,2}{\dfrac{1}{1,2}}+25^{-\frac{1}{2}}=\frac{\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{5}}{\dfrac{5}{6}}+\frac{1}{\sqrt{25}}=\frac{5}{15}\cdot\frac{6}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$$

23. Questão

Calcule o valor da expressão $\sqrt[3]{\dfrac{(0,005)^2\cdot 0,000075}{10}}\div\left(10^{-4}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}\right)$.

Solução:
O melhor para este problema é escrever cada termo como uma potência de 2, 3 ou 5:

$$\frac{\sqrt[3]{\dfrac{\left(\dfrac{5}{1000}\right)^2\cdot\dfrac{75}{1000000}}{10}}}{\dfrac{1}{10000}\cdot\dfrac{1}{2^{\frac{1}{3}}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\dfrac{5^2}{\left[(2\cdot 5)^3\right]^2}\cdot\dfrac{5^2\cdot 3}{(2\cdot 5)^6}}{2\cdot 5}\right)^{\frac{1}{3}}}{\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{(2\cdot 5)^4\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2^6 \cdot 5^4} \cdot \frac{3}{2^6 \cdot 5^4} \cdot \frac{1}{5 \cdot 2}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{4+\frac{1}{3}} \cdot 5^4}}$$

Finalmente podemos escrever:

$$= \frac{\left(\frac{3}{2^{13} \cdot 5^9}\right)^{\frac{1}{3}}}{\frac{3^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{13}{3}} \cdot 5^4}} = \left(\frac{3}{2^{13} \cdot 5^9}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{2^{\frac{13}{3}} \cdot 5^4}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{13}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^4}{2^{\frac{13}{3}} \cdot 5^{9 \times \frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}} = 5$$

24. Questão

Calcule $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,5} + 16^{0,75} - 0,5^{-5} + \left(-\frac{3}{5}\right)^0 \cdot 5$.

Solução:
Reescrevendo a expressão teremos:

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + 16^{\frac{75}{100}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} + \left(-\frac{3}{5}\right)^0 \cdot 5$$

Prosseguindo

$$\left(\frac{1}{\sqrt{16}}\right) + 16^{\frac{3}{4}} - (2)^5 + 5 =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 - 32 + 5$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) + (2)^3 - 32 + 5$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) + 8 - 32 + 5$$

$$= \frac{1}{4} - 19$$

$$= \frac{1-76}{4}$$

$$= -\frac{75}{4}$$

25. Questão

O valor da expressão $16^{\frac{3}{4}} \cdot (-8)^{-\frac{2}{3}}$ é:

a) 2 b) 4 c) 8 d) -2 e) -4

Solução:
Colocando as duas parcelas do produto com a mesma base teremos:

$$\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(-2^3\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right) = 2^{3-2} = 2$$

Opção A

26. Questão

O valor numérico da expressão $\left(\frac{x^2 - y^2 + x - y}{x - y} + \frac{x - y}{y - x}\right)^{\frac{1}{5}}$, para $x = 0,33...$ e $y = \frac{2}{3}$ é:

a) 0 b) 0,1333... c) 0,323 d) $\frac{5}{9}$ e) 1

Solução:
Antes de substituir os valores de x e y, vamos tentar "arrumar" a expressão:

$$\left(\frac{(x-y)(x+y)+x-y}{x-y} + \frac{x-y}{-(x-y)}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Colocando $x - y$ em evidência:

$$\left((x-y)\frac{(x+y)+1}{x-y} - 1\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$((x+y)+1-1)^{\frac{1}{5}}$$

$$(x+y)^{\frac{1}{5}}$$

Substituindo os valores de x e y:

$$\left(0,333 + \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = 1^{\frac{1}{5}} = 1$$

Opção E

27. Questão

Racionalizando-se o denominador da fração $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$, encontramos um fator racionalizante do tipo $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + 1$. Determine o valor da soma $a + b + 1$.

Solução:
O denominador da fração é uma parcela da fatoração da diferença de dois cubos e sabemos que:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Usando a relação anterior:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)}{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)}$$

Aplicando a propriedade distributiva no denominador:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)}{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)} = \frac{\left(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1\right)}{\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} - 1} = \frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

Observando o processo anterior, temos que a soma pedida dá 7 como resultado, pois $a = 4$ e $b = 2$.

28. Questão

O número $d=\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ é um número natural. Qual é esse número?

Solução 1:
Elevando toda a expressão ao quadrado teremos:

$$d^2=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$

Calculando o quadrado da soma:

$$d^2=\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^2-2\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$$

Desenvolvendo:

$$d^2=3+2\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}+3-2\sqrt{2}$$

$$d^2=6-2\cdot\sqrt{\left(3+2\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}$$

$$d^2=6-2\cdot\sqrt{\left(3^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)}$$

$$d^2=6-2\cdot\sqrt{(9-8)}\Rightarrow d^2=6-2\cdot1\Rightarrow d^2=4\Rightarrow d=\pm2$$

Como **d** é natural, temos que $d=2$.

Solução 2:
Podemos usar o desenvolvimento de um radical duplo:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+C}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-C}{2}}$$

$$\text{Onde } C=\sqrt{A^2-B}$$

Aplicando ao enunciado:

1) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}$

$$C=\sqrt{3^2-8}\Rightarrow C=1\Rightarrow\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1$$

2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{3-\sqrt{8}}$

$$C=\sqrt{3^2-8}\Rightarrow C=1\Rightarrow\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}-\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}-1$$

Como d é a diferença entre **1)** e **2)** temos:

$$d=\sqrt{2}+1-\left(\sqrt{2}-1\right)\Rightarrow d=1+1\Rightarrow d=2$$

Equações do 2º Grau

29. Questão

Resolver em $\mathbb{R}-\{-2,2\}$: $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x-2}=1-\frac{1}{x^2-4}$.

Solução:
Fazendo o MMC de ambos os lados:

$$\frac{x-2-(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-4-1}{x^2-4}$$

$$\frac{-4}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-5}{x^2-4}$$

Como o denominador não pode ser nulo teremos:

$$-4=x^2-5$$
$$x^2-5+4=0 \Rightarrow x^2-1=0$$
$$x=\pm 1$$
$$S=\{-1,1\}$$

30. Questão

Resolver a equação abaixo sendo $U=\mathbb{R}$:

$$\frac{3}{2x+1}+\frac{2}{1-2x}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0.$$

Solução:

Trocando o sinal do denominador da segunda fração:

$$\frac{3}{2x+1}-\frac{2}{2x-1}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0$$

Calculando o MMC:

$$\frac{3(2x-1)-2(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}-\frac{x+3}{4x^2-1}=0$$

Aplicando a propriedade distributiva e lembrando que é possível simplificar os denominadores, pois estes não podem ser nulos:

$$6x-3-4x-2-x-3=0$$
$$x-8=0$$
$$x=8$$
$$S=\{8\}$$

31. Questão

Resolver a equação abaixo:

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{x}{1-x}-\frac{2x^2-4}{x^2-1}=0$$

para $x \neq \pm 1$.

Solução:

Trocando o sinal do denominador da segunda equação:

$$\frac{2x}{x+1}-\frac{x}{x-1}-\frac{2x^2-4}{x^2-1}=0$$

Fazendo o MMC:

$$\frac{2x(x-1)-x(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x^2-4}{x^2-1}=0$$

Desenvolvendo:

$$\frac{2x^2-2x-x^2-x-2x^2+4}{(x+1)(x-1)}=0$$
$$-x^2-3x+4=0$$
$$\Delta=(-3)^2-4\cdot(-1)\cdot 4$$
$$\Delta=9+16$$
$$\Delta=25$$

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{25}}{2\cdot(-1)}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3+5}{-2}\Rightarrow x_1=\dfrac{8}{-2}\Rightarrow x_1=-4\\ x_2=\dfrac{3-5}{-2}\Rightarrow x_2=\dfrac{-2}{-2}\Rightarrow x_2=1\end{cases}$$

Como $x\neq\pm1$ temos:

$$S=\{-4\}$$

32. Questão

Resolver a equação algébrica abaixo, sabendo que $x\neq\pm1$ e $x\neq\pm4$:

$$\frac{x^2-8x+16}{x^2-16}\div\frac{x^2-5x+4}{2x+8}+\frac{3}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}.$$

Solução:

Desenvolvendo a expressão:

$$\frac{\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}}{\dfrac{x^2-5x+4}{2x+8}}+\frac{3}{x+1}=\frac{9}{x^2-1}$$

Colocando alguns termos em evidência:

$$\frac{\dfrac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}}{\dfrac{(x-1)(x-4)}{2(x+4)}}+\frac{3}{x+1}-\frac{9}{(x-1)(x+1)}=0$$

Daí:

$$\frac{(x-4)^2}{(x-4)(x+4)}\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{2(x+4)}+\frac{3(x-1)-9}{(x-1)(x+1)}=0$$

$$\frac{2}{(x-1)}+\frac{3x-12}{(x-1)(x+1)}=0$$

Mais uma vez fazendo o MMC e simplificando os denominadores:

$$2(x+1)+3x-12=0$$

$$2x+2+3x-12=0\Rightarrow 5x=10$$

$$x=2$$

$$S=\{2\}$$

33. Questão

Sobre o conjunto-verdade da equação $\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^2=\dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2}$, no universo dos números reais, podemos afirmar que:

a) é infinito

b) é vazio

c) é unitário

d) contém números negativos

e) contém dízimas periódicas

Solução:

Desenvolvendo a expressão:

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}$$

Teremos:

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2y^2}-\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}=0$$

$$\frac{2}{xy}=0$$

Logo não existe par xy real que satisfaça a expressão acima.

Opção B

34. Questão

A equação cujas raízes são $\frac{2a}{3}$ e $-\frac{a}{3}$ é:

a) $9x^2+3ax-2a^2=0$
b) $9x^2-3ax-2a^2=0$
c) $9x^2-3ax+2a^2=0$
d) $-9x^2-3ax-2a^2=0$

Solução:
Como temos as duas raízes podemos calcular a soma (S) e o produto (P):

$$S=\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}\Rightarrow S=\frac{a}{3}$$

$$P=\frac{2a}{3}\cdot\left(-\frac{a}{3}\right)\Rightarrow P=-\frac{2a^2}{9}$$

Podemos então escrever uma equação como abaixo:

$$x^2-\frac{a}{3}x-\frac{2a^2}{9}=0$$

Multiplicando toda a expressão por 9:

$$9x^2-3ax-2a^2=0$$

Opção A

35. Questão

A equação $10x^2+mx+p=0$ tem raízes $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{3}$. Determine o valor numérico de $T=m-p$.

Solução:
Toda equação do 2º grau pode ser escrita como:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes da equação. Então:

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$$

$$a\left(x^2+\frac{x}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$a\left(x^2-\frac{x}{6}-\frac{1}{6}\right)=0$$

$$ax^2 - \frac{ax}{6} - \frac{a}{6} = 0$$

Comparando com a equação original, vemos que $a = 10$, portanto:

$$10x^2 - \frac{5x}{3} - \frac{5}{3} = 0$$

Concluímos então que:

$$m = p = \frac{-5}{3}$$

E

$$m - p = -\frac{5}{3} - \left(-\frac{5}{3}\right) = 0$$

36. Questão

Determine a soma das raízes reais da equação $\sqrt{3}x^2 - \left(3\sqrt{3} + 3\right)x + 9 = 0$.

a) 0 b) $3 - \sqrt{3}$ c) $3 + \sqrt{3}$ d) $6 + \sqrt{3}$ e) Não existem raízes reais

Solução:

A soma das raízes de uma equação existe mesmo que as raízes não sejam reais, pois a parcela que contém $\sqrt{\Delta}$ é cancelada. Primeiro então precisamos verificar se as raízes são reais:

$$\Delta = \left(3\sqrt{3} + 3\right)^2 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 9$$

$$\Delta = 27 + 18\sqrt{3} + 9 - 36\sqrt{3}$$

$$\Delta = 36 - 18\sqrt{3}$$

$$\Delta = 18\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

Como $\sqrt{3} \cong 1,732$ temos que $\Delta > 0$. A soma das raízes será, portanto:

$$S = \frac{3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}}$$

Racionalizando:

$$S = \frac{3\sqrt{3} + 3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{9 + 3\sqrt{3}}{3} = 3 + \sqrt{3}$$

Opção C

37. Questão

Sobre a equação $x^2 - 4x - 1 = 0$, marque a afirmativa correta:

a) O produto das raízes é 1.
b) A soma das raízes é 2.
c) A raiz positiva é um número entre 4 e 5.
d) As duas raízes são positivas.
e) A equação não tem raízes reais.

Solução:

Vamos analisar cada uma das afirmativas:

a) **Falsa.** O produto das raízes é dado por:

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow P = \frac{-1}{1} = -1$$

b) **Falsa.** A soma das raízes é dada por:

$$S = -\frac{b}{a} \Rightarrow S = -\frac{-4}{1} = 4$$

c) **Verdadeira.** Vamos calcular as raízes:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)$$
$$\Delta = 16 + 4$$
$$\Delta = 20$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{20}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{4 + 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{5} \\ x_2 = \dfrac{4 - 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_2 = 2 - \sqrt{5} \end{cases}$$

Como $\sqrt{5} \cong 2,24$ temos que $x_1 \cong 4,24$ e $x_2 \cong -0,24$.

d) **Falsa.** O produto das raízes é negativo, logo as duas raízes tem sinais opostos.

e) **Falsa.** Temos que $\Delta = 20$.

Opção C

38. Questão

Qual a diferença das raízes da equação $mx^2 + (m - p)x - p = 0$, $m \in \mathbb{R}_+^*$?

Solução:

A diferença entre as raízes de uma equação pode ser encontrada da seguinte forma:

$$D = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{\Delta} + b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

Daí:

$$D = \frac{\sqrt{(m - p)^2 - 4 \cdot m \cdot (-p)}}{m}$$
$$D = \frac{\sqrt{m^2 - 2mp + p^2 + 4mp}}{m}$$
$$D = \frac{\sqrt{m^2 + 2mp + p^2}}{m} \Rightarrow D = \frac{\sqrt{(m + p)^2}}{m}$$

Então:

$$D = \frac{|m + p|}{m}$$

39. Questão

A soma dos inversos das raízes da equação $(p^2 - 1)x^2 + (p + 1)x - (3p - 1) = 0$, onde $p \neq 1$, $p \neq -1$ e $p \neq \frac{1}{3}$, é igual a $\frac{1}{2}$. Determine o valor de p.

Solução:

A soma dos inversos das raízes:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}$$

Então:

$$\frac{\frac{-(p+1)}{p^2-1}}{-\frac{3p-1}{p^2-1}} = \frac{-(p+1)}{p^2-1}\cdot\left(-\frac{p^2-1}{3p-1}\right) = \frac{p+1}{3p-1} = \frac{1}{2}$$

Solucionando esta equação:

$$2p+2=3p-1$$
$$p=3$$

40. Questão

A equação $x^2-75x+1=0$ tem suas raízes representadas por a e b. Determine o valor da expressão $\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2$.

Solução:

O que queremos é:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

Desenvolvendo:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

Sabemos que:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \Rightarrow a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$

Usando este resultado na expressão anterior:

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}$$

Como a e b são as raízes temos:

$$\frac{(a+b)^2-2ab}{a^2b^2}=\frac{\left(\frac{-(-75)}{1}\right)^2-2\cdot\frac{1}{1}}{\left(\frac{1}{1}\right)^2}=\frac{5625-2}{1}=5623$$