Soluções das Questões de Matemática do Processo Seletivo de Admissão ao Colégio Naval – PSACN

Concurso 2010

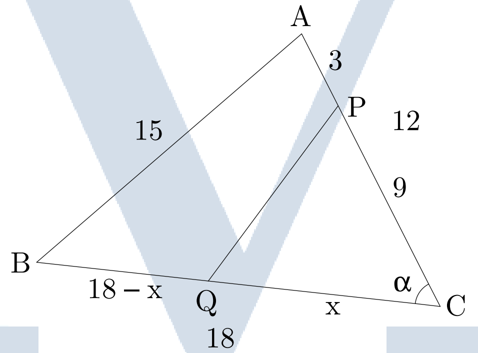
Questão 1

Seja ABC um triângulo com lados $AB = 15$, $AC = 12$ e $BC = 18$. Seja P um ponto sobre o lado AC, tal que $PC = 3AP$. Tomando Q sobre BC, entre B e C, tal que a área do quadrilátero APQB seja igual à área do triângulo PQC, qual será o valor de BQ?

(A) 3,5 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 8,5

Solução:

Fazendo a figura em questão:



Seja α o ângulo em C do triângulo PCQ e também do triângulo ABC. A área do triângulo PQC pode ser escrita como:

$$S_{PQC} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Do enunciado, temos que a área do quadrilátero APQB é igual à área do triângulo PQC, portanto teremos que

$$S_{PQC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$$

A área do triângulo ABC em função de α é dada por:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 18 \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Comparando as áreas:

$$\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 18 \cdot \operatorname{sen}\alpha}_{S_{ABC}} = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot x \cdot \operatorname{sen}\alpha}_{S_{PQC}}$$

O que nos dá:

$$9x = 6 \cdot 18$$
$$x = 12$$

Portanto, BQ será dado por:

$$BQ = 18 - 12 \Rightarrow BQ = 6$$

Opção C

Questão 2

Sejam $p(x) = 2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7$ e $q(x) = x^2 + x + 1$. Tomando $r(x)$ como sendo o resto da divisão de $p(x)$ por $q(x)$, o valor de $r(2)$ será

(A) -8 (B) -6 (C) -4 (D) -3 (E) -2

Solução:
Usando o algoritmo de divisão teremos:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^{2010} - 5x^2 - 13x + 7 & x^2 + x + 1 \\ \cline{2-2}
-2x^{2010} - 2x^{2009} - 2x^{2008} & 2x^{2008} - 2x^{2007} + 2x^{2005} - 2x^{2004} + \ldots + 2x^4 - 2x^3 + 2x - 7 \\ \cline{1-1}
-2x^{2009} - 2x^{2008} - 5x^2 - 13x + 7 & \\
2x^{2009} + 2x^{2008} + 2x^{2007} & \\ \cline{1-1}
2x^{2007} - 5x^2 - 13x + 7 & \\
-2x^{2007} - 2x^{2006} - 2x^{2005} & \\ \cline{1-1}
-2x^{2006} - 2x^{2005} - 5x^2 - 13x + 7 & \\
2x^{2006} + 2x^{2005} + 2x^{2004} & \\ \cline{1-1}
2x^{2004} - 5x^2 - 13x + 7 & \\
\vdots & \\
2x^5 + 2x^4 + 2x^3 & \\ \cline{1-1}
2x^3 - 5x^2 - 13x + 7 & \\
-2x^3 - 2x^2 - 2x & \\ \cline{1-1}
-7x^2 - 15x + 7 & \\
7x^2 + 7x + 7 & \\ \cline{1-1}
-8x + 14 &
\end{array}
$$

Assim $r(x) = -8x + 14$. Calculando $r(2)$ teremos:

$$r(2) = -8(2) + 14 \Rightarrow r(2) = -2$$

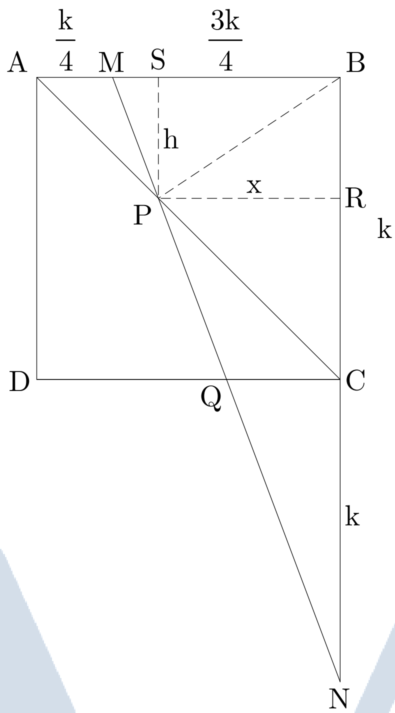
Opção E

Questão 3

Tem-se o quadrado de vértices ABCD com lados medindo “k” cm. Sobre AB marca-se M, de modo que $AM = \frac{BM}{3}$. Sendo N o simétrico de B em relação ao lado CD, verifica-se que MN corta a diagonal AC em P. Em relação à área ABCD a área do triângulo PBC equivale a:

(A) 18% (B) 24% (C) 27% (D) 30% (E) 36%

Solução:
A figura do enunciado fica então:



Primeiro, traçamos OS//BC e PR//CD. Seja a área do triângulo APB:

$$S_{APB} = \frac{k \cdot h}{2}$$

A área do triângulo PBC é dada por:

$$S_{PBC} = \frac{k \cdot x}{2} \tag{1.1}$$

Porém, a mesma área (do triângulo PBC) pode ser obtida subtraindo-se a área do triângulo APB da metade da área do quadrado, ou seja:

$$S_{PBC} = S_{ABC} - S_{APB}$$

$$S_{PBC} = \frac{k^2}{2} - \frac{k \cdot h}{2} \tag{1.2}$$

Igualando as expressões (1.1) e (1.2) teremos:

$$\frac{k \cdot x}{2} = \frac{k^2}{2} - \frac{k \cdot h}{2}$$

$$\frac{k}{2} \cdot x = \frac{k}{2}(k - h)$$

$$x = k - h \tag{1.3}$$

Note que QC é base média do triângulo MNC, logo $QC = \frac{3k}{8}$. Isto pode ser verificado, pois MNC é semelhante à QCN:

$$\frac{QC}{\frac{3k}{4}} = \frac{k}{2k} \Rightarrow QC = \frac{3k}{4} \cdot \frac{k}{2k} \Rightarrow QC = \frac{3k}{8}$$

Provado isso basta verificar que PRN é semelhante à QCN, logo:

$$\frac{x}{\frac{3k}{8}} = \frac{2k - h}{k}$$

Substituindo x em função de k e h – equação (1.3) – teremos:

$$(k-h)k = \frac{3k}{8}(2k-h)$$
$$8k-8h = 6k-3h$$
$$2k = 5h$$
$$h = \frac{2k}{5}$$

Recalculando x em função de k:

$$x = k - \frac{2k}{5}$$
$$x = \frac{3k}{5}$$

Calculando $\frac{S_{PBC}}{S_{ABCD}}$ teremos:

$$\frac{S_{PBC}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{k\cdot\frac{3k}{5}}{2}}{k^2} \Rightarrow \frac{S_{PBC}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{S_{PBC}}{S_{ABCD}} = 30\%$$

Opção D

Questão 4

No conjunto dos inteiros positivos sabe-se que “a” é primo com “b” quando $\mathrm{mdc}(a,b)=1$.

Em relação a este conjunto, analise as afirmativas a seguir:

I. A fatoração em números primos é única.
II. Existem 8 números primos com 24 e menores que 24.
III. Se $(a+b)^2=(a+c)^2$, então $b=c$.
IV. Se $a<b$, então $a\cdot c<b\cdot c$

Quantas das afirmativas acima são verdadeiras?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução:

Analisando cada uma das afirmações:

I. **Verdadeira**. Por definição, a fatoração é a decomposição em fatores primos e é única. O número de divisores positivos de um número (que é único) é obtido pelo produto dos expoentes de cada fator primo, obtido em sua fatoração, acrescido de uma unidade.
II. **Verdadeira**. São primos com 24 e menores que 24: $\{1,5,7,11,13,17,19,23\}$.
III. **Verdadeira**. Desenvolvendo a expressão:

$$a^2+2ab+b^2=a^2+2ac+c^2$$
$$b(2a+b)=c(2a+c)$$

1) Supondo $b=c$ (lembrando do enunciado que **b** e **c** são inteiros positivos):

$$2a=2a$$

2) Supondo $b\neq c$ teremos:

$$2ab-2ac=c^2-b^2$$
$$2a=\frac{c^2-b^2}{b-c}$$

$$a = -\frac{(c-b)(c+b)}{2(c-b)}$$

$$a = -\frac{c+b}{2}$$

Como **c** e **b** são positivos teríamos **a** negativo o que não é possível.

IV. **Verdadeira**. Para inteiros positivos sempre vale esta relação.

Opção E

Questão 5

Estudando os quadrados dos números naturais, um aluno conseguiu determinar corretamente o número de soluções inteiras e positivas da equação $5x^2 + 11y^2 = 876543$. Qual foi o número de soluções que este aluno obteve?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução:

Analisando cada parcela da soma do lado esquerdo:

1) $5x^2$: Esta parcela tem que terminar em **0** ou **5**, pois um múltiplo de 5 sempre tem um desses algarismos nas unidades;

2) $11y^2$: Esta parcela só pode ter como algarismo das unidades os algarismos **0**, **1**, **4**, **5** ou **9**.

Conclusão: para nenhuma dessas combinações teremos uma soma cujo algarismo das unidades seja **3**, que é o caso do número 876543.

Opção A

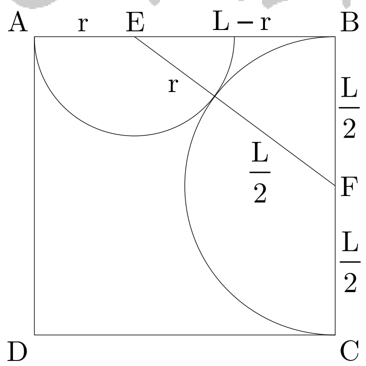
Questão 6

ABCD é um quadrado de lado L. Sejam K a semicircunferência, traçada internamente ao quadrado, com diâmetro CD, e T a semicircunferência tangente ao lado AB em A e tangente a K. Nessas condições, o raio da semicircunferência T será

(A) $\frac{5L}{6}$ (B) $\frac{4L}{5}$ (C) $\frac{2L}{3}$ (D) $\frac{3L}{5}$ (E) $\frac{L}{3}$

Solução:

De acordo com enunciado temos a figura que segue:



Temos que o triângulo BEF é retângulo em B. Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$\left(\frac{L}{2}+r\right)^2 = \frac{L^2}{4} + (L-r)^2$$

$$\frac{L^2}{4} + Lr + r^2 = \frac{L^2}{4} + L^2 - 2Lr + r^2$$
$$3Lr = L^2$$
$$r = \frac{L}{3}$$

Opção E

Questão 7

Considere o conjunto de todos os triângulos retângulos. Sendo "h" a altura relativa à hipotenusa, quantos elementos, nesse conjunto, tem altura igual $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$?

(A) Infinitos.
(B) Mais de dezesseis e menos de trinta.
(C) Mais de quatro e menos de 15.
(D) Apenas um.
(E) Nenhum.

Solução: Seja "h" a altura relativa à hipotenusa, "b" e "c" os catetos e "a" a própria hipotenusa. Sabemos que a relação

$$bc = ah$$

é sempre válida em um triângulo retângulo. Além disso, sabemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Do problema em questão, temos que um dos catetos vale $\frac{\sqrt{15}}{4}h^2$. Portanto, sendo b este cateto:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{15}h^2}{4} \cdot c = ah \\ a^2 = \left(\dfrac{\sqrt{15}h^2}{4}\right)^2 + c^2 \end{cases}$$

Como h é positivo, teremos da primeira equação:

$$\frac{\sqrt{15}h}{4} \cdot c = a$$

Substituindo na segunda equação:

$$\left(\frac{\sqrt{15}h}{4} \cdot c\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{15}h^2}{4}\right)^2 + c^2$$
$$\frac{15h^2}{16}c^2 - c^2 = \frac{15h^4}{16}$$
$$c^2\left(\frac{15h^2}{16} - 1\right) = \frac{15h^4}{16}$$
$$c = \sqrt{\frac{\frac{15h^4}{16}}{\frac{15h^2}{16} - 1}} \Rightarrow c = \frac{\frac{\sqrt{15}h^2}{4}}{\frac{\sqrt{15h^2 - 16}}{4}} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{15}h^2}{\sqrt{15h^2 - 16}}$$

Como c tem que ser um número real, devemos ter

$$15h^2 - 16 > 0$$

$$h^2 > \frac{16}{15}$$

Então

$$h > \frac{4}{\sqrt{15}}$$

Portanto, há infinitos triângulos que satisfazem esta condição.

Opção A

Questão 8

Seja "x" um número real. Define-se $\lfloor x \rfloor$ como sendo o maior inteiro menor do que "x", ou igual a "x". Por exemplo, $\lfloor 2,7 \rfloor$; $\lfloor -3,6 \rfloor$; $\lfloor 5 \rfloor$ são, respectivamente, iguais a 2, -4 e 5. A solução da igualdade $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor = 6$ é o intervalo $[a, b)$. O valor de $a + b$ é

(A) $\frac{15}{4}$ (B) $\frac{9}{2}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $\frac{13}{3}$ (E) $\frac{17}{5}$

Solução:

Por observação, fica claro que $a = 2$, pois $\lfloor 2 \rfloor = 2$ e $\lfloor 2 \cdot 2 \rfloor = 4$ o que nos dá a soma igual a 6. Por observação também, podemos ver que $b = 2,499...$, pois $\lfloor 2,499... \rfloor = 2$ e $\left\lfloor \underbrace{2 \cdot 2,499...}_{4,99...} \right\rfloor = 4$ que nós dá novamente a soma 6. Assim, como queremos $a + b$ devemos calcular:

$$S = 2 + 2,499...$$

Para simplificar vamos escrever S como sendo

$$S = 2 + 2,4 + 0,099...$$

Calculando a fração geratriz da última parcela

$$x = 0,099...$$
$$x = 0,09 + 0,009 + 0,0009 + ...$$
$$10x = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ...$$
$$10x = \frac{9}{10} + x$$
$$9x = \frac{9}{10}$$
$$x = \frac{1}{10}$$

Voltando a S:

$$S = 4,4 + \frac{1}{10} \Rightarrow S = \frac{45}{10} \Rightarrow S = \frac{9}{2}$$

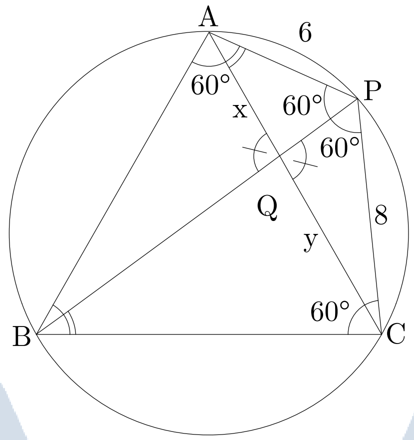
Opção B

Questão 9

ABC é um triângulo equilátero. Seja P um ponto do plano de ABC e exterior ao triângulo de tal forma que PB intersecta AC em Q (Q está entre A e C). Sabendo que o ângulo APB é igual a 60°, que $PA = 6$ e $PC = 8$, a medida de PQ será

(A) $\frac{24}{7}$ (B) $\frac{23}{5}$ (C) $\frac{19}{6}$ (D) $\frac{33}{14}$ (E) $\frac{11}{4}$

Solução:
Construindo a figura teremos:



Como APB é igual a 60°, P deve estar sobre o círculo que circunscreve o triângulo ABC, como visto na figura acima. Pelo mesmo motivo, devemos ter BPC igual a 60°, pois este ângulo subentende o mesmo arco do ângulo em B do triângulo equilátero. Seja L o lado do triângulo equilátero, então:

$$APQ \sim BQC$$

Então

$$\frac{QP}{y} = \frac{6}{L}$$

Também temos que

$$AQB \sim PQC$$

O que nos dá

$$\frac{QP}{x} = \frac{8}{L}$$

Escrevendo x e y em função de L:

$$\frac{QP \cdot L}{6} = y \text{ e } \frac{QP \cdot L}{8} = x$$

Da figura vemos que $x + y = L$, logo

$$L\left(\frac{QP}{8} + \frac{QP}{6}\right) = L$$

$$6QP + 8QP = 48$$

$$QP = \frac{24}{7}$$

Opção A

Questão 10

A diferença entre um desconto de 50% e dois descontos sucessivos de 30% e 20% sobre um valor de R$ 40.000,00 é um valor inteiro:
(A) Múltiplo de 7.
(B) Múltiplo de 9.
(C) Múltiplo de 12.
(D) Ímpar.

(E) Zero, pois os descontos são iguais.

Solução:
Basta fazer:
1) Um desconto de 50%: $40000\times 0,5 = 20000$
2) Um desconto de 30% seguido de 20%: $40000\times 0,7\times 0,8 = 40000\times 0,56 = 22400$
Observação: Dar um desconto de 30% significa multiplicar por 0,7, bem como dar um desconto de 20% significa multiplicar 0,8. Por este motivo, percebe-se que há 6% a mais em descontos sucessivos. Isto corresponde a R$ 2400,00 a mais no valor final.

Opção C

Questão 11

Sejam A, B e C conjuntos tais que: $A = \{1,\{1,2\},\{3\}\}$, $B = \{1,\{2\},3\}$ e $C = \{\{1\},2,3\}$. Sendo X a união dos conjuntos $(A - C)$ e $(A - B)$, qual será o total de elementos de X?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solução:
Seja a definição de diferença de conjuntos:

$$F - G = \{x \mid x \in F \text{ e } x \notin G\} \tag{1.4}$$

Usando a definição (1.4), calculamos os conjuntos pedidos:

$$A - C = \{1,\{1,2\},\{3\}\}$$
$$A - C = A$$

Calculando a outra diferença:

$$A - B = \{\{1,2\},\{3\}\}$$

Calculando agora a união:

$$(A - C)\cup(A - B) = \{1,\{1,2\},\{3\}\}$$

X, portanto, tem 3 elementos.

Opção C

Questão 12

No conjunto dos números reais, o conjunto solução da equação $\sqrt[4]{(2x+1)^4} = 3x + 2$

(A) É vazio.
(B) É unitário.
(C) Possui dois elementos.
(D) Possui três elementos.
(E) Possui quatro elementos.

Solução:
Há duas soluções possíveis:
1) $2x + 1 = 3x + 2$
$-x = 1$
$x = -1$
Testando esta solução:

$$\sqrt[4]{(2(-1)+1)^4} = 3(-1) + 2 \Rightarrow \sqrt[4]{(-1)^4} = -1 \rightarrow \text{Falso}$$

2) $2x + 1 = -(3x + 2)$
$5x = -3$

$x = -\frac{3}{5}$

Testando esta solução:

$$\sqrt[4]{\left(2\left(-\frac{3}{5}\right)+1\right)^4} = 3\left(-\frac{3}{5}\right)+2 \Rightarrow \sqrt[4]{\left(\frac{-6+5}{5}\right)^4} = \frac{-9+10}{5} \Rightarrow \sqrt[4]{\left(-\frac{1}{5}\right)^5} = \frac{1}{5} \rightarrow \text{Verdadeiro}$$

Portanto, o conjunto-solução é unitário.

Opção B

Questão 13

Sabe-se que $p(x) = acx^4 + b(a+c)x^3 + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + b(a+c)x + ac$ é um produto de dois polinômios do 2º grau e que os números a, b e c são reais não nulos com $(b^2 - 4ac)$ positivo. Nessas condições é correto afirmar que:

(A) Há apenas um valor de x tal que $p(x) = 0$.

(B) Há apenas dois valores de x tal que $p(x) = 0$.

(C) Há apenas três valores de x tal que $p(x) = 0$.

(D) Há quatro valores de x tal que $p(x) = 0$.

(E) Não há valores de x tal que $p(x) = 0$.

Solução:

Por observação, podemos verificar que o polinômio $p(x)$ é originado pelo produto dos seguintes polinômios:

$$p(x) = \underbrace{(ax^2 + bx + c)}_{q(x)}\underbrace{(cx^2 + bx + a)}_{s(x)}$$

Do enunciado temos que $(b^2 - 4ac)$ é positivo logo $q(x)$ e $s(x)$ tem ambos duas raízes reais e distintas que chamaremos de x_1, x_2, x_3 e x_4 respectivamente. Assim podemos reescrever $q(x)$ e $s(x)$ como se segue:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)\cdot c(x - x_3)(x - x_4)$$

Portanto, há quatro valores que anulam $p(x)$.

Opção D

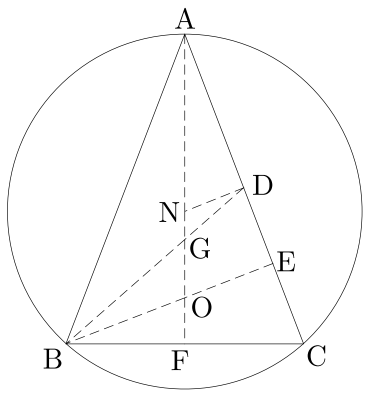
Questão 14

Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é “k”, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

(A) $\frac{5k}{2}$ (B) $\frac{4k}{3}$ (C) $\frac{4k}{5}$ (D) $\frac{k}{2}$ (E) $\frac{k}{3}$

Solução:

Fazendo a figura:



Seja ABC um triângulo isósceles. N é o circuncentro, G é o baricentro e O, o ortocentro. AF é altura e mediana, BE é altura e BD é mediana. Os triângulos BGO e NGD são semelhantes. Fazendo:

$$\frac{NG}{GO}=\frac{GD}{BG} \tag{1.5}$$

Sabemos que $\frac{GD}{BG}=\frac{1}{2}$, pois o baricentro divide a mediana do triângulo em segmentos proporcionais a 1 e 2.

No problema em questão, $NO = k$, com queremos NG, basta voltar à expressão (1.5) e teremos

$$\frac{NG}{k-NG}=\frac{1}{2}$$
$$2\cdot NG = k - NG$$
$$3\cdot NG = k$$
$$NG=\frac{k}{3}$$

Opção E

Questão 15

Dois números reais não simétricos são tais que a soma de seus quadrados é 10 e o quadrado de seu produto é 18. De acordo com essas informações a única opção que contém pelo menos um desses dois números é:

(A) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 1\}$

(B) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x \le 3\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R} \mid 3 \le x \le 5\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R} \mid 5 \le x \le 7\}$

(E) $\{x \in \mathbb{R} \mid 7 \le x \le 9\}$

Solução:

De acordo com o enunciado temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x^2y^2=18 \end{cases}$$

Da segunda equação

$$y^2=\frac{18}{x^2}$$

Substituindo na primeira

$$x^2 + \frac{18}{x^2} = 10$$
$$x^4 + 18 = 10x^2$$
$$x^4 - 10x^2 + 18 = 0$$

Fazendo $x^2 = z$:

$$z^2 - 10z + 18 = 0$$

$$z = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{10 + \sqrt{100 - 72}}{2} \Rightarrow z_1 = 5 + \sqrt{7} \\ z_2 = \dfrac{10 - \sqrt{100 - 72}}{2} \Rightarrow z_2 = 5 - \sqrt{7} \end{cases}$$

Assim

$$(x_1)^2 = 5 + \sqrt{7} \Rightarrow (y_1)^2 = \frac{1}{5 + \sqrt{7}} \Rightarrow (y_1)^2 = 5 - \sqrt{7}$$
$$(x_2)^2 = 5 - \sqrt{7} \Rightarrow (y_2)^2 = \frac{1}{5 - \sqrt{7}} \Rightarrow (y_2)^2 = 5 + \sqrt{7}$$

Sabendo que $\sqrt{7} \cong 2,7$ concluímos que:

$$x_1 = \pm\sqrt{5 + 2,7} \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{7,7}$$
$$x_2 = \pm\sqrt{5 - 2,7} \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{2,3}$$

Como $1^2 = 1$ e $3^2 = 9$ só podemos concluir que $1 \le x \le 3$.

Opção B

Questão 16

No sistema $\begin{cases} 3x - y\sqrt{3} = 0 \\ x^2 \cdot y^{-2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$, a quantidade de soluções inteiras para "x" e "y" é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) Infinita.

Solução 1:
Da primeira equação temos

$$x = y\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Substituindo na segunda equação

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{y}{y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

Se $y \neq 0$ teremos

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

O que nos dá infinitas soluções.
Solução 2:
Isolando y na segunda equação:

$$y^2 = 3x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}x$$

Substituindo cada uma dessas soluções na primeira teremos:

1) $y = \sqrt{3}x$

$$x = \sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para $x \neq 0$ teremos $1 = 1$ infinitas soluções.

2) $y = -\sqrt{3}x$

$x = -\sqrt{3}x \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Para $x \neq 0$ teremos $-1 = 1$ não há soluções.

Observação: Embora o sistema possua infinitas soluções, para nenhuma delas teremos **x e y simultaneamente inteiros a não ser que ambos sejam nulos**, o que não é possível. Basta observar a primeira equação.

Opção A

Questão 17

No conjunto dos números reais, qual será o conjunto-solução da inequação $\dfrac{88}{\sqrt{121}} - \dfrac{1}{x} \leq 0{,}25^{\frac{1}{2}}$?

(A) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2}{15} < x < \dfrac{15}{2}\right\}$

(B) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \dfrac{2}{15}\right\}$

(C) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{2}{15} < x < 0\right\}$

(D) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid -\dfrac{15}{2} \leq x < -\dfrac{2}{15}\right\}$

(E) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\dfrac{15}{2}\right\}$

Solução:

Reescrevendo a inequação:

$$\frac{88}{11} - \frac{1}{x} \leq \sqrt{\left(\frac{25}{100}\right)}$$

$$8 - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{8x-1}{x} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{2(8x-1)-x}{2x} \leq 0$$

$$\frac{15x-2}{2x} \leq 0$$

A raiz do numerador é $\dfrac{2}{15}$ e do denominador é zero. Fazendo um quadro de sinais:

		0		$\frac{2}{15}$	
$15x-2$	$-$		$-$		$+$
$2x$	$-$		$+$		$+$
Q	$+$	$\circ$	$-$	$\bullet$	$+$

O que nos dá como solução $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \frac{2}{15}\right\}$.

Opção B

Questão 18

Considere o sistema abaixo, nas variáveis x e y, sendo a e b reais.

$$\begin{cases} 375y^2x - 125y^3 - 375yx^2 + 125x^3 = 125b \\ y^2 + x^2 + 2yx = a^2 \end{cases}$$

Nessas condições, qual será o valor de $\left(x^2 - y^2\right)^6$?

(A) a^3b^6 (B) a^8b^6 (C) a^6b^2 (D) a^3b^6 (E) a^4b^6

Solução:

Na primeira equação podemos colocar 25 em evidência:

$$25\left(15y^2x - 5y^3 - 15yx^2 + 5x^3\right) = 25 \cdot 5b$$

Simplificando a expressão e colocando em evidência agora o 5:

$$5\left(3y^2x - y^3 - 3yx^2 + x^3\right) = 5b$$

Simplificando novamente e arrumando os termos teremos

$$(x - y)^3 = b \tag{1.6}$$

Na segunda equação, podemos reescrever

$$(x + y)^2 = a^2 \tag{1.7}$$

Do enunciado temos a expressão $\left(x^2 - y^2\right)^6$ que pode ser escrita como sendo:

$$\left(x^2 - y^2\right)^6 = \left[(x - y)(x + y)\right]^6$$

Substituindo as expressões (1.6) e (1.7) que encontramos por meio do sistema:

$$\left(x^2 - y^2\right)^6 = \left[\sqrt[3]{b} \cdot a\right]^6$$

$$\left(x^2 - y^2\right)^6 = a^6b^{\frac{6}{3}} \Rightarrow \left(x^2 - y^2\right)^6 = a^6b^2$$

Opção C

Questão 19

Sejam p e q números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$. Qual o valor mínimo do produto pq?

(A) 8040 (B) 4020 (C) 2010 (D) 1005 (E) 105

Solução:

Desenvolvendo a expressão dada

$$\frac{p + q}{pq} = \frac{1}{\sqrt{2010}}$$

$$p + q = \frac{pq}{\sqrt{2010}} \tag{1.8}$$

Sendo p e q as raízes de uma equação quadrática teremos a equação abaixo:

$$x^2 - (p + q)x + pq = 0$$

Usando a expressão (1.8):

$$x^2 - \frac{pq}{\sqrt{2010}}x + pq = 0$$

Resolvendo

$$x = \frac{\frac{pq}{\sqrt{2010}} \pm \sqrt{\left(\frac{pq}{\sqrt{2010}}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot pq}}{2\cdot 1}$$

Como p e q são as raízes desta equação e p e q são reais devemos ter:

$$\frac{(pq)^2}{2010} - 4pq \geq 0$$

$$\frac{(pq)^2 - 4\cdot 2010\cdot pq}{2010} \geq 0$$

$$\frac{pq\,(pq - 4\cdot 2010)}{2010} \geq 0$$

$$pq \geq 8040$$

Opção A

Questão 20

No conjunto "$\mathbb{R}$" dos números reais, qual será o conjunto-solução da equação $\frac{\sqrt{3}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{3}}{2x-2} - \frac{\sqrt{3}}{2x+2}$?

(A) $\mathbb{R}$

(B) $\mathbb{R} - (-1,1)$

(C) $\mathbb{R} - [-1,1]$

(D) $\mathbb{R} - \{-1,1\}$

(E) $\mathbb{R} - [-1,1)$

Solução: Resolvendo esta equação encontramos

$$\frac{\sqrt{3}}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2(x-1)} - \frac{\sqrt{3}}{2(x+1)}$$

$$\sqrt{3}\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

Como o denominador não pode ser zero, temos $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Excluindo-se estes dois valores, a expressão acima é válida para quaisquer valores de x.

Opção D