Escola Preparatória de Cadetes do Exército

17 de novembro

2010

Este documento contém soluções comentadas das questões de matemática das provas de seleção para a Escola Preparatória de Cadetes do Exército

EsPCEx

Soluções das Questões de Matemática do Processo Seletivo de Admissão à Escola Preparatória de Cadetes do Exército — EsPCEx

Concurso 2009

Questão 1

Sabendo-se que $\log x + \log x^3 + \log x^5 + \ldots + \log x^{199} = 10000$, podemos afirmar que x pertence ao intervalo

(A) $[1,3]$ (B) $[3,5]$ (C) $[5,7]$ (D) $[7,9]$ (E) $[9,11]$

Solução:

Sabemos que os logaritmos possuem a seguinte propriedade:

$$\log_b ac = \log_b a + \log_b c$$

Aplicando esta propriedade teremos:

$$\log x + \log x^3 + \log x^5 + \ldots + \log x^{199} = 10000$$

$$\log\left(x \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot \ldots \cdot x^{199}\right) = 10000$$

$$\log x^{1+3+5+\ldots+199} = 10000$$

A soma $1+3+5+\ldots+199$ trata-se da soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 2. Calculando o número de termos teremos:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 199 = 1 + (n-1)\cdot 2$$

$$n = \frac{198}{2} + 1$$

$$n = 100$$

Assim, queremos calcular a soma de 100 termos desta P.A. Como sabemos que a soma dos n termos de uma P.A. é dada pela expressão:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Teremos então:

$$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100})\cdot 100}{2}$$

$$S_{100} = \frac{(1+199)\cdot 100}{2}$$

Portanto:

$$S_{100} = 10000$$

Voltando à nossa expressão original:

$$\log x^{1+3+5+\ldots+199} = 10000 \Rightarrow \log x^{10000} = 10000$$

Aplicaremos agora, outra propriedade dos logaritmos:

$$\log_b a^c = c \log_b a$$

Então:

$$10000 \log x = 10000$$
$$\log x = 1$$
$$x = 10$$

Opção E

Questão 2

Considere a função real $g(x)$ definida por:

$$\begin{cases} 5^x, \text{ se } x \leq 1 \\ -\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{3x}{2} + \dfrac{17}{4}, \text{ se } 1 < x \leq 3 \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

O valor de $g(g(g(1)))$ é

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

Solução:

Como a questão pede o valor de $g(g(g(1)))$, vamos calcular cada valor sem precisar fazer a composta das funções. Para $x = 1$ usamos a primeira expressão de g:

$$g(1) = 5^1 \Rightarrow g(1) = 5$$

Agora devemos calcular $g(g(5))$. Para $x = 5$ usamos a terceira expressão:

$$g(5) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow g(5) = 3$$

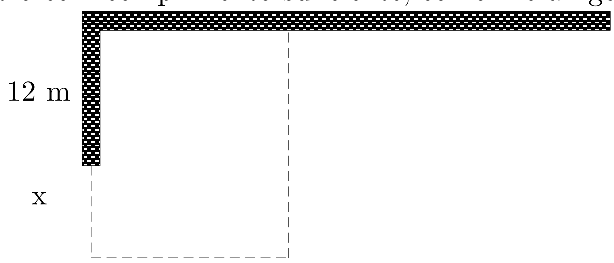
Agora queremos $g(3)$, fazemos uso agora da segunda expressão:

$$g(3) = -\frac{3 \cdot 9}{4} + \frac{3 \cdot 3}{2} + \frac{17}{4}$$
$$g(3) = \frac{-27 + 18 + 17}{4}$$
$$g(3) = 2$$

Opção C

Questão 3

Um agricultor, que dispõe de 60 metros de tela, deseja cercar uma área retangular, aproveitando-se de dois trechos de muro, sendo um deles com 12 metros de comprimento e o outro com comprimento suficiente, conforme a figura abaixo.



Sabendo que ele pretende usar exatamente os 60 metros de tela, pode-se afirmar que a expressão que representa a área cercada y, em função da dimensão x indicada na figura, e o valor da área máxima que se pode obter nessas condições são, respectivamente, iguais a

(A) $y = -2x^2 + 24x + 576$ e $648\ m^2$
(B) $y = -2x^2 - 24x + 476$ e $548\ m^2$
(C) $y = -x^2 + 36x + 576$ e $900\ m^2$
(D) $y = -2x^2 + 12x + 436$ e $454\ m^2$
(E) $y = -x^2 + 12x + 288$ e $288\ m^2$

Solução:
Os lados da área são expressos por $12 + x$ e z. Desta forma a área retangular possui a seguinte expressão:
$$y = (12 + x)z$$
Como sabemos que o comprimento da tela é de 60 metros, podemos escrever:
$$x + z + 12 + x = 60$$
O que nos dá
$$z = 48 - 2x$$
Substituindo a segunda equação na primeira
$$y = (12 + x)(48 - 2x)$$
Desenvolvendo
$$y = 576 - 24x + 48x - 2x^2$$
$$y = 576 + 24x - 2x^2$$
Como esta expressão representa uma parábola com concavidade para baixo, seu máximo vale
$$y_v = -\frac{\Delta}{4a}$$
Onde y_v representa a ordenada do vértice, logo:
$$y_v = -\frac{(24^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 576)}{4 \cdot (-2)}$$
$$y_v = \frac{576(1+8)}{8}$$
$$y_v = 648$$
A área máxima será, portanto, $648\ m^2$.

Opção A

Questão 4
Dada a função real modular $f(x) = 8 + (|4k - 3| - 7)x$, em que k é real. Todos os valores de k para que a função dada seja decrescente pertencem ao conjunto
(A) $k > 2,5$
(B) $k < -1$
(C) $-2,5 < k < -1$
(D) $-1 < k < 2,5$
(E) $k < -1$ ou $k > 2,5$

Solução:
Para que uma função do tipo $f(x) = ax + b$ seja decrescente devemos ter $a < 0$. Portanto, da função dada:
$$|4k - 3| - 7 < 0$$

$$|4k - 3| < 7$$

Então, há duas hipóteses a considerar:

$$\textbf{1)}\ 4k - 3 < 7$$
$$4k < 10$$
$$k < 2,5$$
$$\text{e}$$
$$\textbf{2)}\ 4k - 3 > -7$$
$$4k > -4$$
$$k > -1$$

Fazendo a interseção das soluções, obtemos a resposta.

Opção D

Questão 5

Um dos modelos matemáticos de crescimento populacional é conhecido como "Modelo Malthusiano" (Thomas Malthus, 1766-1834). Neste modelo, a evolução de uma população é dada pela função

$$P(t) = P_0 \cdot K^t$$

em que P_0 é a população inicial, k indica a taxa de crescimento (considerada constante e não negativa neste modelo) e t é o tempo decorrido. Um biólogo que estudava uma cultura de bactérias observou que, oito horas após o início do experimento, a população era de 8000 indivíduos e que, duas horas depois dessa observação, a população era de 16000 indivíduos. Podemos afirmar que a população inicial era de

(A) 250 (B) 500 (C) 512 (D) 1000 (E) 1024

Solução:

O enunciado nos dá que

$$P(8) = P_0 \cdot K^8 \Rightarrow P_0 \cdot K^8 = 8000$$

E que

$$P(10) = P_0 \cdot K^{10} \Rightarrow P_0 \cdot K^{10} = 16000$$

Dividindo uma expressão pela outra teremos

$$\frac{K^{10}}{K^8} = \frac{16000}{8000} \Rightarrow K^2 = 2 \Rightarrow K = \pm\sqrt{2} \Rightarrow K = \sqrt{2}$$

Lembrar, do enunciado, que K é uma **constante positiva**. Voltando a uma das equações:

$$P_0 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^8 = 8000$$

$$P_0 = \frac{8000}{16} \Rightarrow P_0 = 500$$

Opção B

Questão 6

O valor de x na equação exponencial $7^{2x-1} - 7^x - 7^{x-1} = 0$ é:

(A) $\frac{2\log 2}{\log 7}$ (B) $\frac{3\log 3}{\log 7}$ (C) $\frac{2\log 3}{\log 7}$ (D) $\frac{3\log 2}{\log 7}$ (E) $\frac{3\log 8}{\log 7}$

Solução:

Podemos reescrever a equação como:

$$\left(7^x\right)^2 \cdot 7^{-1} - 7^x - 7^x \cdot 7^{-1} = 0$$

Chamando $7^x = y$ teremos:

$$\frac{y^2}{7} - y - \frac{y}{7} = 0$$

$$\frac{y^2 - 8y}{7} = 0 \Rightarrow y^2 - 8y = 0$$

$$y(y-8) = 0$$

Temos agora duas soluções:

$$y(y-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow 7^x = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \\ y = 8 \Rightarrow 7^x = 8 \Rightarrow \log_7 8 = x \end{cases}$$

Fazendo uma mudança de base para base 10 na segunda solução:

$$\log_7 8 = \frac{\log 8}{\log 7} \Rightarrow \log_7 8 = \frac{\log 2^3}{\log 7} \Rightarrow \log_7 8 = \frac{3\log 2}{\log 7}$$

Opção D

Questão 7

Dentre as várias formas de se medir temperatura, destacam-se a escala Celsius, adotada no Brasil, e a escala Fahrenheit, adotada em outros países. Para a conversão correta de valores de temperaturas entre essas escalas, deve-se lembrar que 0 grau, na escala Celsius, corresponde a 32 graus na escala Fahrenheit e que 100 graus, na escala Celsius, correspondem a 212 graus na escala Fahrenheit.

Para se obter um *valor aproximado* da temperatura, na escala Celsius, correspondente a uma temperatura conhecida na escala Fahrenheit, existe ainda uma regra prática definida por:

"divida o valor da temperatura em Fahrenheit por 2 e subtraia 15 do resultado."

A partir dessas informações, pode-se concluir que o valor da temperatura, na escala Celsius, para o qual a regra prática fornece o *valor correto* na conversão é

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50

Solução:

Sabemos que a regra correta de conversão entre as escalas Celsius e Fahrenheit é dada pela expressão:

$$\frac{t_C}{5} = \frac{t_F - 32}{9}$$

A expressão para o valor aproximado é

$$t_C = \frac{t_F}{2} - 15$$

Como queremos que os valores aproximado e correto sejam iguais para a temperatura em Celsius, devemos ter:

$$\frac{5(t_F - 32)}{9} = \frac{t_F}{2} - 15$$

$$10t_F - 320 = 9t_F - 270$$

$$t_F = 50$$

Substituindo em uma das expressões

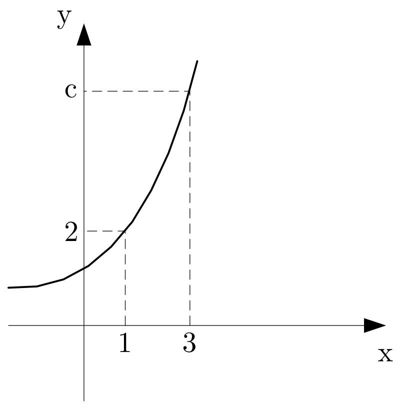
$$t_C = \frac{50}{2} - 15$$

$$t_C = 10$$

Opção A

Questão 8

O gráfico abaixo representa a função $y = a^x$. A partir dos dados fornecidos, pode-se concluir que o valor de $\log_a c + \log_c a$ é igual a



(A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{10}{3}$ (C) $\frac{17}{4}$ (D) zero (E) 2

Solução:

Como o gráfico representa a função $y = a^x$ podemos substituir o ponto $(1, 2)$:

$$y = a^x \Rightarrow 2 = a^1 \Rightarrow a = 2$$

Usando o ponto $(3, c)$:

$$y = 2^x \Rightarrow c = 2^3 \Rightarrow c = 8$$

Calculando $\log_a c + \log_c a$:

$$\log_a c + \log_c a = \log_2 8 + \log_8 2 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

Opção B

Questão 9

O número de arcos no intervalo $\left[0, \frac{19\pi}{6}\right]$ cujo valor do cosseno é igual a $\frac{1}{2}$ é

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Solução:

Queremos solucionar a seguinte equação:

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

Teremos então:

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Solucionando cada uma:

$$\textbf{1)}\ \cos x = \cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x = \cos\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$k = 0 \to x = \frac{\pi}{3} + 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$k = 1 \to x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{7\pi}{3}$$

$$k = 2 \to x = \frac{\pi}{3} + 4\pi \Rightarrow x = \frac{13\pi}{3}, \text{ está fora do intervalo } \left[0, \frac{19\pi}{6}\right].$$

$$\textbf{2)}\quad \cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$$

$$x = \cos\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

Como $k \in \mathbb{Z}$ temos:

$$k = 0 \to x = \frac{5\pi}{3} + 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3}$$

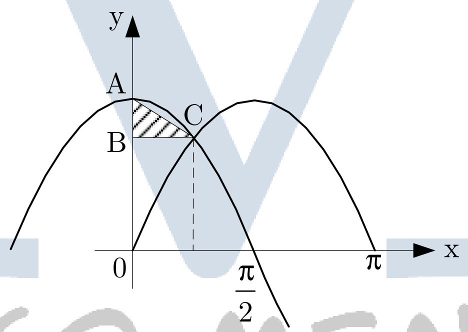
$$k = 1 \to x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{3}, \text{ está fora do intervalo } \left[0, \frac{19\pi}{6}\right].$$

As soluções válidas são $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right\}$.

Opção C

Questão 10

As funções $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$ estão representadas no gráfico abaixo. Então, a medida da área do triângulo retângulo definido pelos segmentos retilíneos AB, BC e AC é:



(A) $\frac{\pi}{8}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

(B) $\frac{\pi}{8}$

(C) $\frac{\pi}{16}\left(2 - \sqrt{2}\right)$

(D) $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}$

(E) $\frac{\pi}{16}\left(1 - \sqrt{2}\right)$

Solução:

O ponto C do triângulo tem suas coordenadas definidas pela solução da equação $\operatorname{sen} x = \cos x$ no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solucionando a equação

$$\text{sen}x = \cos x \Rightarrow \frac{\text{sen}x}{\cos x} = 1 \Rightarrow \text{tg}x = 1$$

$$\text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Testando os valores de k:

$$k = 0 \to x = \frac{\pi}{4} \pm 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$k = 1 \to x = \frac{\pi}{4} \pm \pi \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi \Rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} - \pi \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

A única solução dentro do intervalo é $\frac{\pi}{4}$. Como $\text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ as coordenadas do ponto C são $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Como o ponto B corresponde à amplitude máxima do cosseno de x, as coordenadas do ponto B são $(0,1)$. Assim teremos a área do triângulo dada por:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{4}}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\left(2 - \sqrt{2}\right)}{2}$$

Opção A

Questão 11

Considere duas retas r e s no espaço e quatro pontos distintos, A, B, C e D, de modo que os pontos A e B pertencem à reta r e os pontos C e D pertencem à reta s.

I – Se as retas AC e BD são concorrentes, então r e s são necessariamente concorrentes.

II – Os triângulos ABC e ABD serão sempre coplanares.

III – Se AC e BD forem concorrentes, então as retas r e s são coplanares.

Pode-se concluir que

Dentre as afirmações abaixo

(A) somente a I é verdadeira.

(B) somente a II é verdadeira.

(C) somente a III é verdadeira.

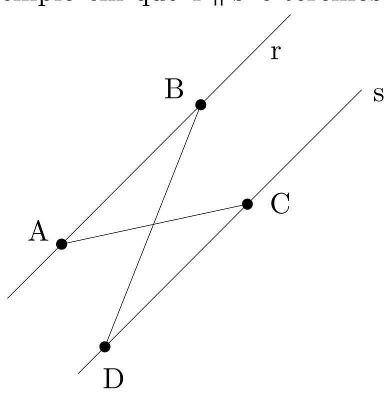
(D) as afirmações II e III são verdadeiras.

(E) as afirmações I e III são verdadeiras.

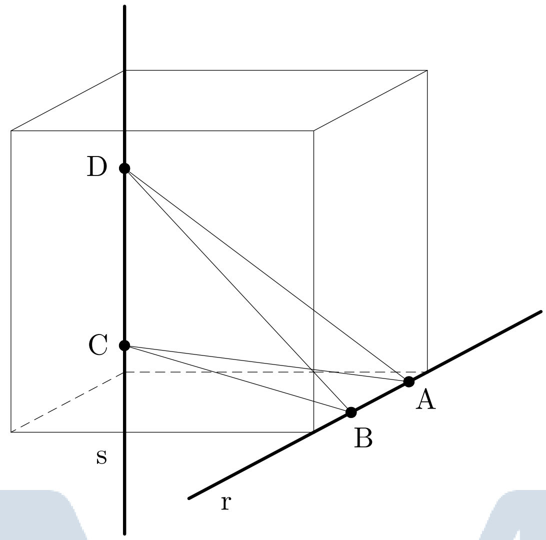
Solução:

Analisemos cada afirmativa em separado:

I – **Falsa.** Basta o contra-exemplo em que $r \parallel s$ e teremos a figura abaixo:



II – **Falsa.** Basta o contra-exemplo em que r e s são ortogonais, por exemplo, contendo arestas de um cubo. Veja a figura abaixo:

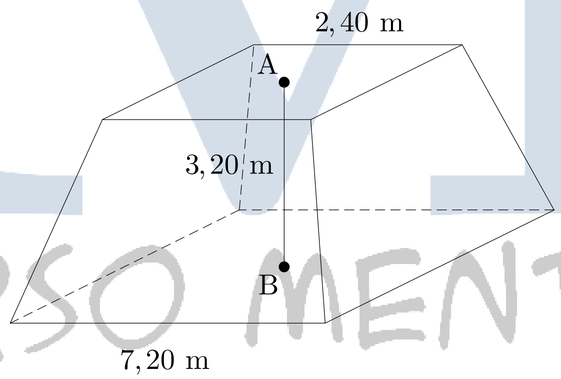


III – **Verdadeira.** Caso AC e BD sejam concorrentes elas determinarão um ponto E de concorrência. Como três pontos determinam um único plano, teremos dois triângulos coplanares: ABE e DCE.

Opção C

Questão 12

Um reservatório em forma de tronco de pirâmide regular de base quadrada e dimensões indicadas na figura deverá ter suas paredes laterais externas cobertas por uma tinta impermeável, cujo rendimento é de 11 m^2 por galão.

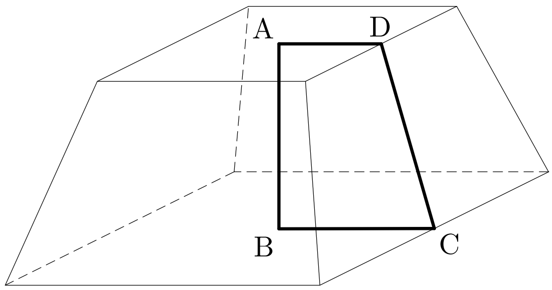


O número mínimo de galões que devem ser adquiridos para tal operação é:

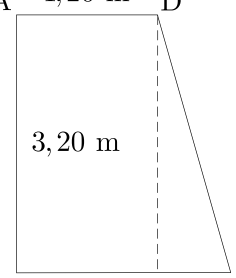
(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 11

Solução:

Analisando a figura podemos traçar o trapézio ABCD abaixo:



Analisando somente o trapézio:



O triângulo CDE é retângulo em E, portanto:

$$CD^2 = DE^2 + CE^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{24}{10}\right)^2 + \left(\frac{32}{10}\right)^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2$$

$$CD^2 = \left(\frac{4 \cdot 3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4 \cdot 4}{5}\right)^2 \Rightarrow CD = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 (9 + 16)}$$

$$CD = 4 \text{ m}$$

Como CD é a altura do trapézio que compõem as 4 faces laterais do tronco de pirâmide, a área lateral a ser pintada é dada por:

$$S = 4 \cdot \frac{(7,2 + 2,4) \cdot 4}{2}$$

$$S = 76,8 \text{ m}^2$$

Assim deve-se comprar 7 galões – que pintarão até 77 m^2 de superfície – para pintar toda a superfície lateral.

Opção B

Questão 13

Um investidor possui ações das companhias A, B e C. A tabela abaixo fornece, em 3 dias consecutivos, as variações, em Reais, dos valores das ações e o lucro obtido em cada dia, também em Reais. Os valores negativos correspondem a desvalorizações, e os valores positivos a valorizações.

	Variações(R$)	Lucro Total (R$)

	A	B	C	
Dia 1	4	5	–2	800
Dia 2	1	2	–1	200
Dia 3	2	3	3	1700

Sabendo que o investidor não comprou nem vendeu ações nesses dias, pode-se afirmar que a soma das quantidades de ações das companhias A, B e C que ele possui é

(A) 700 (B) 600 (C) 550 (D) 400 (E) 350

Solução:

Supondo que o investidor possua **x** ações da companhia A, **y** ações da companhia B e **z** ações da companhia C. As equações abaixo representam os dias:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2z = 800 \\ x + 2y - z = 200 \\ 2x + 3y + 3z = 1700 \end{cases}$$

Há várias formas de solucionar esse sistema. Vamos usar a substituição de uma equação na outra. Assim, da segunda equação:

$$z = x + 2y - 200$$

Substituindo esta expressão na primeira e na terceira equação teremos:

$$\begin{cases} 4x + 5y - 2(x + 2y - 200) = 800 \\ 2x + 3y + 3(x + 2y - 200) = 1700 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 5y - 2x - 4y + 400 = 800 \\ 2x + 3y + 3x + 6y - 600 = 1700 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 400 \\ 5x + 9y = 2300 \end{cases}$$

Da primeira equação teremos

$$y = 400 - 2x$$

Substituindo na outra:

$$5x + 9(400 - 2x) = 2300$$

$$5x + 3600 - 18x = 2300$$

$$-13x = -1300$$

$$x = 100$$

Como $y = 400 - 2x$ teremos para y:

$$y = 200$$

Sabemos que $z = x + 2y - 200$, então:

$$z = 300$$

Portanto a soma $x + y + z$ é igual a 600.

Opção B

Questão 14

Sete livros didáticos, cada um de uma disciplina diferente, devem ser posicionados lado a lado em uma estante, de forma que os livros de Física, de Química e de Matemática estejam sempre juntos, em qualquer ordem. O número de maneiras diferentes em que esses livros podem ser posicionados é

(A) 720 (B) 1440 (C) 2160 (D) 2880 (E) 5040

Solução:

Podemos representar esta situação pelo esquema

$$[FQM]ABCD$$

Onde F,Q e M representam os livros de Física, Química e Matemática. As letras A,B,C e D representam as outras 4 disciplinas. Podemos considerar [FQM] como um dos cinco elementos que permutam. O que nos dá:

$$P_5 = 5! \Rightarrow P_5 = 120$$

Para cada uma dessas 120 teremos uma permutação de F, Q e M. Portanto, o total será:

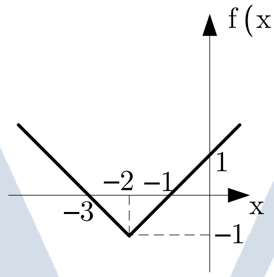
$$T = 120 \cdot 3! \Rightarrow T = 720$$

Opção A

Concurso 2008

Questão 1

Observando o gráfico abaixo, que representa a função real $f(x) = |x - k| - p$, pode-se concluir que os valores de k e p são, respectivamente,



(A) 2 e 3 (B) −3 e −1 (C) −1 e 1 (D) 1 e −2 (E) −2 e 1

Solução:
Vamos desenvolver a expressão da função:

$$f(x) = |x - k| - p \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - k - p, & \text{se } x - k \geq 0 \\ -x + k - p, & \text{se } x - k < 0 \end{cases}$$

Então:

$$f(x) = \begin{cases} x - (k + p), & \text{se } x \geq k \\ -x + (k - p), & \text{se } x < k \end{cases}$$

Observando o gráfico da função e comparando com a expressão anterior, percebemos que a abscissa em que a função **f** deixa de ser decrescente e passa a ser crescente pertence ao ponto $(-2, -1)$.
Portanto,

$$k = -2$$

Para $x \geq -2$ a função é crescente e corta o eixo das ordenadas no ponto $(0,1)$, logo:

$$-(k + p) = 1 \Rightarrow -2 + p = -1$$

$$p = 1$$

Opção E

Questão 2

Os gráficos das funções $f(x) = a^{x-2}$ e $g(x) = x^2 - 9x - 7$ se interceptam em um ponto cuja abscissa é igual a 5. Nesse caso, o valor de **a** é:

(A) $-\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{1}{3}$ (C) 3 (D) -3 (E) 27

Solução:

No ponto de interseção teremos então que $x = 5$, daí:

$$f(5) = a^{5-2} \Rightarrow f(5) = a^3$$

$$g(5) = 5^2 - 9 \cdot 5 - 7 \Rightarrow g(5) = -27$$

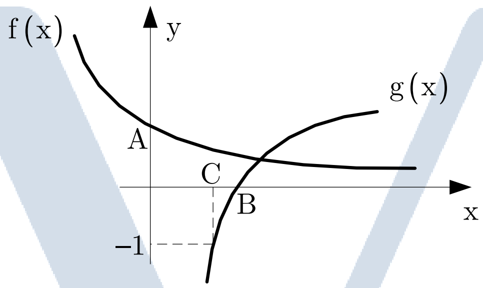
Portanto:

$$a^3 = -27 \Rightarrow a = -3$$

Opção D

Questão 3

Na figura abaixo, estão representados os gráficos das funções reais $f(x) = (0{,}1)^x$ e $g(x) = \log(x-1)$. Nessas condições, os valores de A, B e C são, respectivamente,



(A) 1, 2 e $\dfrac{11}{10}$

(B) 1, 2 e $\dfrac{9}{10}$

(C) $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{11}{10}$ e 1

(D) 10, 11 e $\dfrac{9}{10}$

(E) 1, $\dfrac{11}{10}$ e $\dfrac{9}{10}$

Solução:

O ponto A tem coordenadas $(0, a)$. Substituindo na função correspondente:

$$f(0) = (0{,}1)^0 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow a = 1$$

O ponto B tem coordenadas $(b, 0)$. Substituindo na função correspondente:

$$g(b) = \log(b-1) \Rightarrow \log(b-1) = 0$$

$$b - 1 = 10^0 \Rightarrow b = 2$$

O ponto C tem coordenadas $(c, -1)$. Substituindo na função correspondente:

$$g(c) = \log(c-1) \Rightarrow \log(c-1) = -1$$

$$c - 1 = 10^{-1} \Rightarrow c = \frac{1}{10} + 1$$

$$c = \frac{11}{10}$$

Opção A

Questão 4

O valor de x para o qual as funções reais $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 5^{1-x}$ possuem a mesma imagem é:

(A) $\log 2 + 1$ (B) $\log 2 - 1$ (C) $1 - \log 2$ (D) $2\log 2 + 1$ (E) $1 - 2\log 2$

Solução:

Para que ambas possuam a mesma imagem devemos ter:

$$f(x) = g(x)$$

O que nos dá:

$$2^x = 5^{1-x}$$

$$2^x = \frac{5}{5^x} \Rightarrow (2 \cdot 5)^x = 5$$

$$10^x = 5$$

Aplicando logaritmo na base 10 de ambos os lados:

$$x \cdot \log 10 = \log 5$$

$$x = \log \frac{10}{2}$$

$$x = \log 10 - \log 2$$

$$x = 1 - \log 2$$

Opção C

Questão 5

Uma pesquisa sobre produção de biodiesel mostra que os lucros obtidos em função da área plantada, para a mamona e para a soja, são descritos pelas funções a seguir:

— para a mamona, $f(x) = 100x - 2000$

— para a soja, $g(x) = 120x - 3000$

Em ambos os casos, x corresponde ao número de hectares plantados e f(x) e g(x) aos respectivos lucros obtidos. Com base nessas informações, é possível afirmar que:

(A) O plantio de soja torna-se lucrativo para todas as áreas maiores que 20 ha.

(B) Para um agricultor que vá cultivar 40 ha, a opção mais lucrativa é a soja.

(C) O plantio de mamona é mais lucrativo que a soja em áreas maiores que 50 ha.

(D) Para uma área de 50 ha, as duas culturas apresentam a mesma lucratividade.

(E) O plantio da mamona dá prejuízo para todas as áreas menores que 30 ha.

Solução:

Analisando cada uma das opções:

(A) **Falsa.** Verificamos para que valores de x teremos:

$$120x - 3000 > 0$$

$$x > \frac{300}{12} \Rightarrow x > 25$$

(B) **Falsa.** Para 40 ha temos:

$$f(40) = 100 \cdot 40 - 2000 \Rightarrow f(40) = 2000$$

$$g(40) = 120 \cdot 40 - 3000 \Rightarrow g(40) = 1800$$

Ou seja, para 40 ha a mamona é mais lucrativa.

(C) **Falsa.** Queremos que:

$$100x - 2000 > 120x - 3000$$

$$20x < 1000$$

$$x < 50$$

(D) **Verdadeira.** Para 50 ha teremos:

$$f(50) = 100 \cdot 50 - 2000 \Rightarrow f(50) = 3000$$

$$g(50) = 120 \cdot 50 - 3000 \Rightarrow g(50) = 3000$$

(E) **Falsa.** Queremos que:

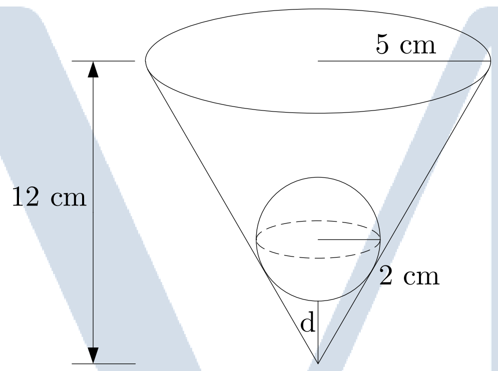
$$100x - 2000 < 0$$
$$100x < 2000$$
$$x < 20$$

O prejuízo ocorre para áreas menores que 20 ha.

Opção D

Questão 6

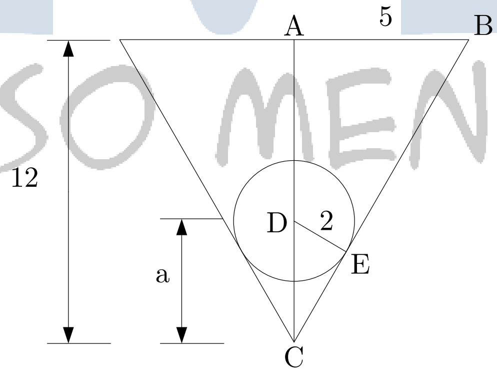
Uma esfera de 2 cm de raio é colocada no interior de um vaso cônico, conforme a figura a seguir. O vaso tem 12 cm de altura e sua abertura é uma circunferência com 5 cm de raio. Nessas condições, a menor distância (d) entre a esfera e o vértice do cone é



(A) 3,0 cm (B) 3,2 cm (C) 3,4 cm (D) 3,6 cm (E) 3,8 cm

Solução:

Fazendo uma seção meridiana da figura dada temos a figura abaixo:



Como CDE é retângulo, podemos calcular a hipotenusa BC:

$$BC = \sqrt{25 + 144} \Rightarrow BC = 13 \text{ cm}$$

Os triângulos ABC e CDE são retângulos e semelhantes, então:

$$\frac{a}{13} = \frac{2}{5}$$

$$a = \frac{26}{5}$$

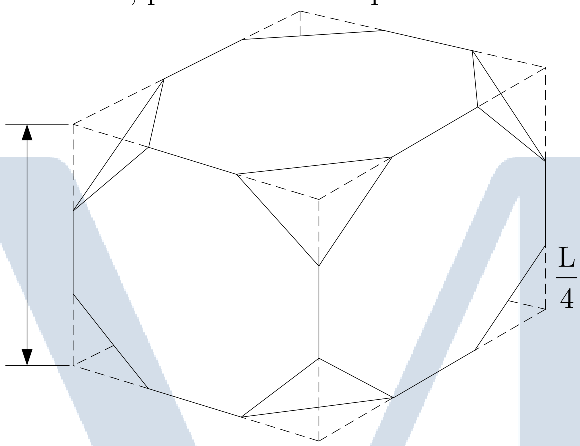
A distância d então será:

$$d = \frac{26}{5} - \frac{6}{5} \Rightarrow d = \frac{16}{5}$$
$$d = 3{,}2 \text{ cm}$$

Opção B

Questão 7

Para obter o sólido geométrico representado abaixo, partiu-se de um cubo de aresta L e retirou-se de cada um dos vértices desse cubo uma pirâmide de base triangular com as arestas laterais medindo $\frac{L}{4}$ conforme a figura. Denominando-se V o volume do cubo a partir do qual foi obtido o sólido, pode-se concluir que o volume desse sólido é



(A) $\frac{23V}{24}$ (B) $\frac{47V}{48}$ (C) $\frac{71V}{72}$ (D) $\frac{95V}{96}$ (E) $\frac{143V}{144}$

Solução:

Foram retiradas 8 pirâmides de base retangular e arestas medindo $\frac{L}{4}$, calculando o volume total retirado:

$$V_{\text{Retirado}} = 8 \cdot \frac{\frac{\frac{L}{4} \cdot \frac{L}{4}}{2} \cdot \frac{L}{4}}{3} \Rightarrow V_{\text{Retirado}} = 8 \cdot \frac{\frac{L^2}{32} \cdot \frac{L}{4}}{3} \Rightarrow V_{\text{Retirado}} = 8 \cdot \frac{L^3}{32 \cdot 4 \cdot 3}$$
$$V_{\text{Retirado}} = \frac{L^3}{48}$$

O volume do sólido V_S fica então:

$$V_S = L^3 - \frac{L^3}{48} \Rightarrow V_S = \frac{47L^3}{48}$$

Como V é o volume do cubo:

$$V = L^3$$

E

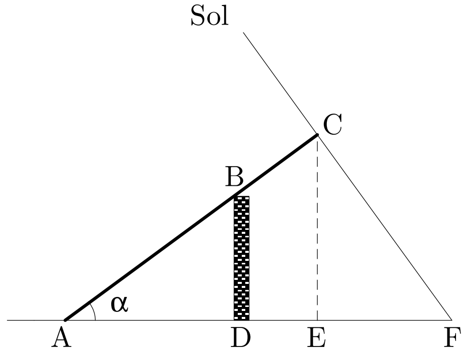
$$V_S = \frac{47}{48} V$$

Opção B

Questão 8

Na figura a seguir, está representado um muro (BD) de 6m de altura em que está apoiada uma escada representada por AC, que faz um ângulo α com a horizontal.

Sabe-se que a parte da escada indicada pelo segmento AB corresponde a $2/3$ do seu comprimento. Num determinado momento do dia, os raios de sol fazem com a vertical um ângulo também de valor α, projetando no ponto F a sombra da extremidade C da escada. Dados: $\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\ \alpha = \frac{4}{5}$



Assim, considerando desprezível a espessura do muro, a medida do segmento DF, que corresponde à parte da sombra da escada que está além do muro, nesse instante, é igual a:

(A) 6,75 m (B) 10,75 m (C) 14,75 m (D) 18,75 m (E) 22,75 m

Solução:
Como ACB é retângulo em B temos que o triângulo ACF é retângulo em C. Em consequência, os triângulos ABD, ACE e ACF são semelhantes.
Dos dados do enunciado temos:

$$\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{6}{AB} \Rightarrow AB = 10 \text{ m}$$

Como a escada está apoiada em $\frac{2}{3}$ do seu comprimento:

$$AB = \frac{2}{3}AC \Rightarrow AC = \frac{30}{2} \Rightarrow AC = 15$$

O que nos dá:

$$BC = 5$$

Continuando:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AF} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{15}{AF} \Rightarrow AF = \frac{75}{4} \text{ m}$$

E também:

$$\cos\alpha = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AD}{10} \Rightarrow AD = 8 \text{ m}$$

Como queremos DF:

$$DF = AF - AD \Rightarrow DF = \frac{75}{4} - 8$$

$$DF = \frac{75-32}{4} \Rightarrow DF = 10,75 \text{ m}$$

Opção B

Questão 9

Em uma determinada função quadrática, -2 e 3 são suas raízes. Dado que o ponto $(-3,12)$ pertence ao gráfico dessa função, pode-se concluir que

(A) o seu valor máximo é $-12,50$

(B) o seu valor mínimo é 0,50
(C) o seu valor máximo é 6,25
(D) o seu valor mínimo é $-12,50$
(E) o seu valor máximo é 0,50

Solução:
Toda função quadrática pode ser escrita em função de suas raízes x_1 e x_2 da seguinte maneira:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Então:

$$f(x) = a(x + 2)(x - 3)$$

Fazendo $x = -3$:

$$a(-3 + 2)(-3 - 3) = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{6}$$
$$a = 2$$

Reescrevendo a função:

$$f(x) = 2(x + 2)(x - 3) \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 2x - 12$$

Calculando a ordenada do vértice:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}{4 \cdot 2} \Rightarrow y_v = -\frac{4 + 96}{8}$$
$$y_v = -12,5$$

Como **a** é positivo a função tem um valor mínimo.

Opção D

Questão 10

Para se ter acesso a um arquivo de computador, é necessário que o usuário digite uma senha de 5 caracteres na qual os três primeiros são algarismos distintos, escolhidos de 1 a 9, e os dois últimos caracteres são duas letras, distintas ou não, escolhidas dentre as 26 do alfabeto. Assim, o número de senhas diferentes, possíveis de serem obtidas por esse processo, é

(A) 327650 (B) 340704 (C) 473805 (D) 492804 (E) 501870

Solução:
Pelo princípio da multiplicação temos:

$$T = \underbrace{9 \cdot 8 \cdot 7}_{\substack{\text{Algarismos} \\ \text{distintos} \\ \text{de 1 a 9}}} \cdot \underbrace{26 \cdot 26}_{\substack{\text{Letras} \\ \text{quaisquer} \\ \text{do alfabeto}}} \Rightarrow T = 340704$$

Opção B

Questão 11

Considere as matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} x \\ -\cos^2 x & \cot g x \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$, $x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. A matriz resultante do produto matricial $M_1 M_2$ é:

(A) $\begin{bmatrix} \sec^2 x \\ \cos^2 x \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} \operatorname{tg}^2 x \\ -\cos^2 x \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} \sec^2 x \\ \operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} \cos\sec^2 x \\ -\operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix}$

(E) $\begin{bmatrix} \cos^2 x \\ \operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix}$

Solução:
Multiplicando as matrizes:

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{tg} x \\ -\cos^2 x & \cot g x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ -\cos^2 x + \cot g x \cdot \operatorname{tg} x \end{bmatrix}$$

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ -\cos^2 x + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \end{bmatrix}$$

Lembrando que:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

Dividindo a expressão anterior por $\cos^2 x$:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x$$

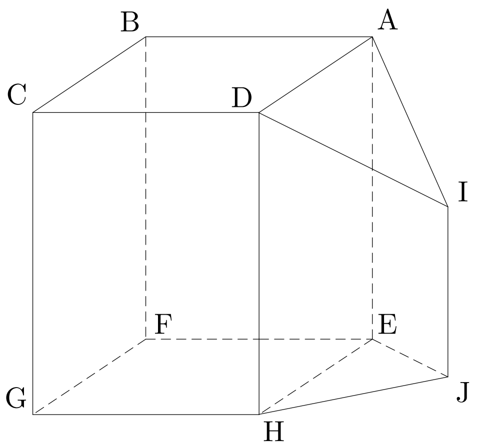
Substituindo na matriz:

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{bmatrix} \sec^2 x \\ \operatorname{sen}^2 x \end{bmatrix}$$

Opção C

Questão 12

A ilustração a seguir representa um paralelepípedo retângulo ABCDEFGH e um prisma reto triangular de base EHJ seccionado por um plano, gerando o triângulo isósceles ADI, cuja medida AI é igual à medida DI. Diante das informações acima, podemos afirmar que:



(A) A reta JH é ortogonal à reta DC
(B) As retas EJ e FG são reversas
(C) A reta IJ é ortogonal à reta EF

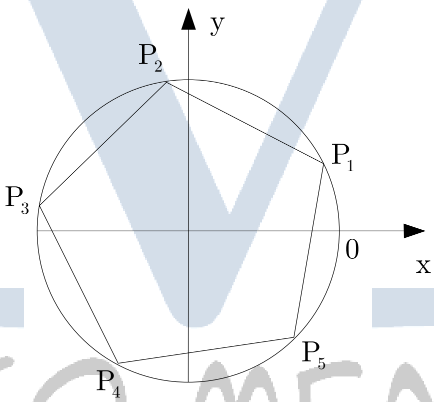
(D) A reta AI é concorrente à reta BC
(E) A reta AI é paralela à reta EJ

Solução:
Analisando as afirmações:
(A) **Falsa.** JH e DC são retas reversas (estão em planos distintos), mas não ortogonais (os planos não formam um diedro de 90°).
(B) **Falsa.** EJ e FG são coplanares. Ambas pertencem ao plano EFGHJ.
(C) **Verdadeira.** IJ pertence aos planos IDHJ e AEJI (interseção dos planos) e portanto é ortogonal a reta que contém FE.
(D) **Falsa.** AI e BC são reversas.
(E) **Falsa.** AI e EJ são concorrentes, pois pertencem ao mesmo plano AEJI e seus prolongamentos se interceptam.

Opção C

Questão 13

Na figura, está representado um circulo trigonométrico em que os pontos P_1 a P_5 indicam extremidades de arcos. Esses pontos, unidos, correspondem aos vértices de um pentágono regular inscrito no círculo. Se o ponto P_1 corresponde a um arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos. Então o ponto P_4 corresponderá à extremidade de um arco cuja medida, em radianos, é igual a:



(A) $\frac{13\pi}{30}$ (B) $\frac{17\pi}{30}$ (C) $\frac{29\pi}{30}$ (D) $\frac{41\pi}{30}$ (E) $\frac{53\pi}{30}$

Solução:

Como o ponto P_1 corresponde a um arco de $\frac{\pi}{6}$ radianos, basta verificarmos quanto vale o ângulo central de um pentágono regular:

$$a_c = \frac{360°}{5} \Rightarrow a_c = \frac{2\pi}{5}$$

Daí o ponto P_4 corresponde a:

$$P_4 = \frac{\pi}{6} + 3 \cdot \frac{2\pi}{5} \Rightarrow P_4 = \frac{5\pi + 36\pi}{30}$$

$$P_4 = \frac{41\pi}{30}$$

Opção D

Questão 14

A soma das idades dos amigos Pedro, José e Ivo é igual a 60. Sabe-se que a soma da idade de José com a diferença entre as idades de Pedro e Ivo (nesta ordem) é igual a 30 e que o dobro da idade de Pedro mais a idade de José, menos a idade de Ivo é igual a 55. Assim, a idade de José é

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30

Solução:

Chamando as idades de P, J e I, teremos:

$$\begin{cases} P + J + I = 60 \\ J + P - I = 30 \\ 2P + J - I = 55 \end{cases}$$

Somando a primeira com a segunda equação e a primeira com a terceira equação teremos:

$$\begin{cases} P + J + I + J + P - I = 60 + 30 \\ 2P + J - I + P + J + I = 55 + 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2P + 2J = 90 \\ 2J + 3P = 115 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda da primeira equação:

$$2J + 3P - 2P - 2J = 115 - 90$$

$$P = 25$$

Substituindo no segundo sistema formado:

$$2 \cdot 25 + 2J = 90$$

$$J = 20$$

Substituindo no sistema original:

$$25 + 20 + I = 60$$

$$I = 15$$

Opção C