Conjunto dos Números Complexos

Unidade Imaginária

Seja a equação:

$$x^2 + 1 = 0$$

Como sabemos, no domínio dos **números reais,** esta equação **não** possui solução, criou-se então um número cujo quadrado é -1. Esse número, representado pela letra **i**, denominado **unidade imaginária** é definido por:

$$i = \sqrt{-1}$$

Voltando à equação:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = i \\ x_2 = -i \end{cases}$$

A partir disso, surge a necessidade de um novo conjunto de números denominado **conjunto dos números complexos**, que indicaremos por $\mathbb{C}$.

A Forma Algébrica

Todo número complexo pode ser escrito na forma

$$z = a + bi$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, denominada forma algébrica.

Temos ainda que **a** é chamado de **parte real** de **z,** denotamos por $\text{Re}(z)$, e **b** chamado de **parte imaginária** de **z**, denotamos por $\text{Im}(z)$, veja:

$$z = a + bi \Rightarrow \begin{cases} a = \text{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ b = \text{Im}(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Observação 1: Se $a = 0$, dizemos que z é **imaginário puro**.
Observação 2: Se $b = 0$, então z é um **número real**.
Exemplo 1: $z_1 = 3 + 5i$

$$\begin{cases} \text{Re}(z_1) = 3 \\ \text{Im}(z_1) = 5 \end{cases}$$

Exemplo 2: $z_2 = -2i$

$$\begin{cases} \text{Re}(z_2) = 0 \\ \text{Im}(z_2) = -2 \end{cases}$$

Exemplo 3: $z_3 = 6$

$$\begin{cases} \text{Re}(z_3) = 6 \\ \text{Im}(z_3) = 0 \end{cases}$$

Igualdade de Números Complexos

Dois números complexos são iguais se, e somente se, suas partes reais e imaginárias forem respectivamente **iguais**, ou seja,

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

Exemplo: Determinar **x** e **y** de modo que $2x + y + 6i = 5 + (x + 4y)i$.

Solução: De acordo com o que vimos, para que dois números complexos sejam iguais, devemos ter suas partes reais e imaginárias respectivamente iguais. Então, fazendo $z_1 = 2x + y + 6i$ e $z_2 = 5 + (x + 4y)i$, temos:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) = 2x + y \\ \operatorname{Im}(z_1) = 6 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} \operatorname{Re}(z_2) = 5 \\ \operatorname{Im}(z_2) = x + 4y \end{cases}$$

Igualando as partes real e imaginária de z_1 e z_2 teremos o sistema abaixo:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$$

Isolando x na segunda equação:

$$x = 6 - 4y$$

Substituindo este resultado na primeira:

$$2(6 - 4y) + y = 5$$
$$-8y + y = 5 - 12$$
$$-7y = -7$$
$$y = 1$$

Voltando a uma das equações do sistema:

$$x = 6 - 4 \Rightarrow x = 2$$

Conjugado de um Número Complexo

Seja

$$z = a + bi$$

um número complexo qualquer, define-se como complexo **conjugado de z** o número complexo

$$\bar{z} = a - bi$$

Ou seja, as partes reais são iguais e as partes imaginárias são simétricas.

Exemplo: Os números complexos $3 + 2i$ e $3 - 2i$ são conjugados.

Observação: O conjugado do conjugado de um número complexo é o próprio número, ou seja,

$$\bar{\bar{z}} = z$$

Operações com Números Complexos

Adição e subtração

Para somarmos ou subtrairmos números complexos somamos ou subtraímos as partes reais e imaginárias separadamente. Sejam então, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, dois números complexos quaisquer, temos que:

$$z_1 + z_2 = a + bi + c + di \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

E

$$z_1 - z_2 = a + bi - (c + di) \Rightarrow z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

Exemplo 1: Dados dois números complexos $z = 2 + 3i$ e $w = 6 + 4i$, calcular $z + w$.

Solução: De acordo com o que vimos:

$$z + w = 2 + 6 + (3 + 4)i$$
$$z + w = 8 + 7i$$

Observação: A soma de um complexo com seu conjugado é um número real:

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi \Rightarrow z + \bar{z} = 2a$$

Multiplicação

Para multiplicarmos dois números complexos usamos a regra da multiplicação de binômios. Sejam então, $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, dois números complexos quaisquer, temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci - bd \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Exemplo 2: Sejam dois números complexos $w_1 = 2 + 4i$ e $w_2 = 1 + 3i$. Calcular o valor de $w_1 w_2$.

Solução: Basta multiplicarmos os binômios aplicando a propriedade distributiva da multiplicação:

$$w_1 w_2 = (2 + 4i)(1 + 3i) = 2 + 6i + 4i + 12 \cdot i^2 = -10 + 10i$$

Divisão

Para efetuar a divisão de dois números complexos, colocamos o quociente sobre a forma de fração e fazemos a racionalização, multiplicando numerador e denominador pelo conjugado do denominador. Ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

Exemplo: Sejam os dois complexos $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 1 + i$. Calcular a divisão $\frac{z_1}{z_2}$.

Solução: Como vimos, para dividir números complexos precisamos racionalizar o denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 + i}$$

Racionalizando:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 2i}{1 + i} = \frac{3 + 2i}{1 + i} \cdot \frac{(1 - i)}{(1 - i)} = \frac{3 - 3i + 2i - 2i^2}{1 - i + i - i^2} = \frac{5 - i}{2}$$

Potências de i

Calculando-se as potências de expoentes naturais de **i**, notamos que se repetem com um período quatro unidades, veja:

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & i^4 = 1 & i^8 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i \end{array}$$

Ou seja, basta tomarmos o resto da divisão do expoente por **4** como o novo expoente.

Exemplo 1: Calcule o valor de i^{23}.

Solução: Primeiro dividimos 23 por 4 para descobrir o resto:

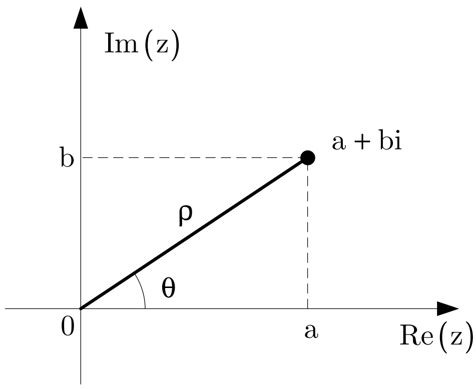
$$\begin{array}{r|l} 23 & 4 \\ \cline{2-2} 3 & 5 \end{array}$$

Como o resto vale **3** teremos:

$$i^{23} = i^3 = -i$$

Plano de Argand-Gauss

É o plano que **no eixo das abscissas** representa a **parte real de z** e, no **eixo das ordenadas**, a **parte imaginária de z**.



Módulo e Argumento de um Número Complexo

Olhando para a figura anterior podemos destacar alguns elementos:

- A distância da origem do plano até o ponto $a+bi$ chamamos de **módulo do complexo** (representado pela letra grega ρ) e calculamos seu valor usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado por ρ, **a** e **b**:

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- O ângulo formado pela semirreta e o eixo das abscissas (representado pela letra grega θ), medido no sentido anti-horário, é denominado **argumento do número complexo** z. Ou seja,

$$\theta = \arg(z), 0 \le \theta \le 2\pi$$

Observamos ainda que como o triângulo é retângulo valem as seguintes relações:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \ \text{ e } \ \text{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$$

Estas relações serão úteis na determinação da forma conhecida como Polar ou Trigonométrica.

Forma Trigonométrica ou Polar

Como vimos anteriormente, um número complexo qualquer da forma

$$z = a + bi$$

pode ser representado em um plano chamado **Plano de Argand-Gauss**. A partir daí sabemos que valem as relações:

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \ \text{ e } \ \text{sen}\theta = \frac{b}{\rho}$$

Escrevendo **a** e **b** em função do argumento θ:

$$a = \rho\cos\theta \ \text{ e } \ b = \rho\,\text{sen}\theta$$

Substituindo **a** e **b** na expressão original de z:

$$z = \rho\cdot\cos\theta + \rho\cdot\text{sen}\theta\cdot i$$

Colocando ρ em evidência:

$$z = \rho\cdot(\cos\theta + i\cdot\text{sen}\theta)$$

Que é chamada de **forma trigonométrica** ou **polar**.

Exemplo: Passar para a forma trigonométrica o número complexo: $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Solução: Primeiro calculamos o módulo de z:

$$z = 1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 1 \\ \operatorname{Im}(z) = \sqrt{3} \end{cases}$$

Então:

$$\rho = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$\rho = \sqrt{4} \Rightarrow \rho = 2$$

Agora calculamos o argumento:

$$\begin{cases} a = \rho \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ b = \rho \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{b}{\rho} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Ou seja, o ângulo θ tem o seno e o cosseno positivo, portanto θ está no primeiro quadrante do círculo trigonométrico. Então:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Colocando na forma trigonométrica teremos:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

Operações com Complexos na Forma Trigonométrica

Sejam dois números complexos z_1 e z_2 representados na forma trigonométrica abaixo:

$$z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right) \text{ e } z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2\right)$$

Multiplicação

Efetuando a multiplicação:

$$z_1 z_2 = \left[\rho_1\left(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1\right)\right] \cdot \left[\rho_2\left(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2\right)\right]$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot i\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + i^2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2\right)$$

Separando a parte real da parte complexa:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\left(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2\right)\right]$$

Lembrando que:

$$\cos(a + b) = \cos a\cos b - \operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$$

E

$$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen}a\cos b - \operatorname{sen}b\cos a$$

É fácil verificar que o produto será dado por:

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left[\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\operatorname{sen}\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right]$$

Divisão

Efetuando a divisão:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\theta_1+i\text{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\text{sen}\theta_2)}$$

Racionalizando o denominador:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1(\cos\theta_1+i\text{sen}\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\text{sen}\theta_2)}\cdot\frac{(\cos\theta_2-i\text{sen}\theta_2)}{(\cos\theta_2-i\text{sen}\theta_2)}$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1\left(\cos\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1 i\text{sen}\theta_2+i\text{sen}\theta_1\cos\theta_2-i^2\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2\right)}{\rho_2\left[(\cos\theta_2)^2-i\cos\theta_2\text{sen}\theta_2+i\text{sen}\theta_2\cos\theta_2-i^2(\text{sen}\theta_2)^2\right]}$$

Separando a parte real da parte complexa:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1\left[\cos\theta_1\cos\theta_2+\text{sen}\theta_1\text{sen}\theta_2+i(-\cos\theta_1\text{sen}\theta_2+\text{sen}\theta_1\cos\theta_2)\right]}{\rho_2\left[(\cos\theta_2)^2-i\cos\theta_2\text{sen}\theta_2+i\text{sen}\theta_2\cos\theta_2+(\text{sen}\theta_2)^2\right]}$$

Lembrando que:

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\text{sen}a\text{sen}b$$

$$\text{sen}(a+b)=\text{sen}a\cos b-\text{sen}b\cos a$$

E

$$\text{sen}^2x+\cos^2x=1$$

É fácil verificar que a divisão será dada por:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\text{sen}(\theta_1-\theta_2)\right]$$

Potenciação – Fórmula de De Moivre

Considere um complexo **z** qualquer escrito na forma polar, utilizando a propriedade da multiplicação na forma trigonométrica. Podemos mostrar que, para uma potência de ordem **n**, teremos:

$$z^n=\rho^n\left[\cos(n\theta)+i\text{sen}(n\theta)\right]$$

Esta expressão é chamada de fórmula de De Moivre, com **n** natural e diferente de zero.

A Expressão de Euler

Existe outra maneira de representar um número complexo que pode ser demonstrada através de uma expansão em série de Fourier da função e^x.

O número complexo z na forma trigonométrica pode ser representado como abaixo:

$$\rho e^{i\theta}=\rho\cdot(\cos\theta+i\cdot\text{sen}\theta)$$

Esta forma é útil para operações de multiplicação e divisão, pois precisamos apenas utilizar as propriedades de potência.

Exercícios de Fixação

1) Se você dividir o número 4 em duas parcelas, o produto destas é 29. Calcule as parcelas.

2) Determine k de modo que o número complexo $z=(k+5)-4i$ seja imaginário puro.

3) Sendo $z_1=x^2-1+(4-y)i$ e $z_2=3-10i$, determine **x** e **y**, para que $z_1=z_2$.

4) Determine o número complexo **z** que satisfaz a igualdade $\frac{z}{2}-\frac{\overline{z}}{4}=-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}i$.

5) Calcule os números complexos que satisfazem o sistema $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ 2z_1 - z_2 = 3i \end{cases}$.

6) Determine o conjugado do número complexo $z = \dfrac{2+i}{i}$.

7) Resolva: $\left(\dfrac{-1+5i}{2+3i}\right)^2$.

8) Obtenha **z** tal que $\dfrac{z}{1-i} + \dfrac{z+2}{1+i} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2}i$.

9) Calcule o valor de $i^{123} + i^{180}$.

10) Calcule o módulo do determinante $\begin{vmatrix} 1 & i & 1 \\ i & 1 & i \\ 1+i & 1-i & 0 \end{vmatrix}$.

11) Determine o conjunto solução da equação $|z|^2 + z - z\overline{z} = 3 + 3i$.

12) Sabendo que $z\overline{z} = 24$, calcule o módulo de z.

13) Determine o número complexo $z = \dfrac{1+i^3}{1+i}$ na forma trigonométrica.

14) Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} w & w \\ -1 & w \end{pmatrix}$, em que $w = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{2\pi}{3}$. Calcule o valor de det A.

15) Obtenha o módulo do número complexo $(1+3i)^4$.

16) Se $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6$, calcule a parte real e imaginária de z.

17) Calcule **a** e **b** reais, sabendo que: $\begin{vmatrix} a+2i & -3 \\ 1-i & i^3 \end{vmatrix} = b + 2i$.

18) É dado o número complexo $w = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}$. Calcule: $w + w^2 + w^3 + w^4 + w^5$.

19) Se i é a unidade imaginária, então $\dfrac{i^{15} + i^{16}}{i^{17} - i^{18}}$ vale quanto?

20) Qual o valor da expressão: $i + i^2 + i^3 + i^4 + \ldots + i^{1001}$.

21) Qual o valor de $\left\|\begin{matrix} 1 & i \\ i^5 & i^3 \end{matrix}\right\|$?

Gabarito

1) $(2 \pm 5i)$
2) -5
3) $x = \pm 2$ e $y = 14$
4) $-\frac{2}{3} + \frac{8}{9}i$
5) $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 2 - i$
6) $1 + 2i$
7) $-\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$
8) $z = \frac{1}{2} + \frac{9}{2}i$
9) $1 - i$
10) $2\sqrt{2}$
11) $\{3 + 3i\}$
12) $2\sqrt{6}$
13) $z = \cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi$
14) -1
15) 100
16) -1 e 0
17) $a = -5$ e $b = 5$
18) -1
19) $-i$
20) i
21) 2