Matrizes

Definição

Uma matriz do tipo $m \times n$ (lê-se m por n), com $m \geq 1$ e $n \geq 1$, sendo m e n números inteiros, é uma tabela formada por $m \cdot n$ elementos dispostos em **m** linhas e **n** colunas. Estes elementos podem estar entre parênteses $(\ )$ ou entre colchetes $[\ ]$.

Exemplo 1: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ — matriz de 2 linhas e 2 colunas.

Exemplo 2: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ — matriz de 3 linhas e 3 colunas.

Exemplo 3: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ — matriz de 3 linhas e 1 coluna.

Exemplo 4: $\begin{bmatrix} 0 & 34 & \frac{1}{2} & -9 \end{bmatrix}$ — matriz de 1 linha e 4 colunas.

Representação Algébrica

Algebricamente, uma matriz A pode ser representada por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ com m e } n \in \mathbb{N}^*$$

Em geral, utilizamos letras maiúsculas para as matrizes e letras minúsculas para cada um dos elementos. Podemos representar ainda, de maneira resumida, por:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$$

Os elementos são indicados por a_{ij} onde:

$$i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$$

$$j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$$

O índice **i** indica a linha e **j** representa a coluna do respectivo elemento.

Matriz Quadrada

Quando o número de linhas de uma matriz é igual ao número de colunas, então dizemos que a matriz é quadrada de ordem **n**.

Exemplo 1: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

Exemplo 2: $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 2.

Exemplo 3: $[5]$ é uma matriz quadrada de ordem 1.

Observação 1: Quando uma matriz tem todos os elementos iguais a zero dizemos que é uma matriz **nula**.

Exemplo 4: $O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Em geral, representamos uma matriz nula usando a letra O.

Observação 2: Os elementos em que $i = j$, formam a **diagonal principal**. A outra diagonal é chamada de **diagonal secundária**.

Matriz Unidade ou Identidade

Uma matriz quadrada de ordem n com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os restantes iguais a zero é chamada de matriz identidade.

Exemplo 1: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 2: $I_1 = [1]$

Matriz Transposta

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, denominamos transposta de **A** a matriz de ordem $n \times m$ obtida pela troca ordenada das linhas pelas colunas. Indica-se a transposta de A por A^t.

Exemplo 1: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcular sua transposta.

Solução: Por definição, basta trocarmos linhas por colunas, então:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Igualdade de Matrizes

Sejam as matrizes A e B de mesma ordem. Se cada elemento de A for igual ao elemento na mesma posição de B, as matrizes A e B são iguais.

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \begin{cases} \forall i \in \{1,2,3,\ldots,m\} \\ \forall j \in \{1,2,3,\ldots,n\} \end{cases} \quad (1.1)$$

Operações com Matrizes

Adição e subtração

A adição ou a subtração de duas matrizes, A e B, do mesmo tipo, é efetuada somando-se ou subtraindo-se os seus elementos correspondentes.

Adição: Para efetuarmos a soma de matrizes, seguimos como abaixo:

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (1.2)$$

$$\text{Com } \begin{cases} i \in \{1,2,3,\ldots,m\} \\ j \in \{1,2,3,\ldots,n\} \end{cases}$$

Exemplo 1: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ calcular a matriz C tal que $C = A + B$.

Solução: Usando a definição (1.2) teremos:

$$C = A + B \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1+3 & 6+0 \\ 5+1 & 0+10 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Subtração: Para efetuarmos a soma de matrizes, seguimos como abaixo:

$$C = A - B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad (1.3)$$

$$\text{Com } \begin{cases} i \in \{1,2,3,\ldots,m\} \\ j \in \{1,2,3,\ldots,n\} \end{cases}$$

Exemplo 2: Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ calcular a matriz C tal que $C = A - B$.

Solução: Usando a definição (1.3) teremos:

$$C = A - B \Rightarrow C = \begin{pmatrix} -1-3 & 6-0 \\ 5-(-5) & 0-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ 10 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Matriz oposta

Denominamos a matriz oposta de A a matriz –A cujos elementos são os simétricos dos elementos correspondentes de A.

Exemplo 1: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calcule a oposta de A.

Solução: Trocando o sinal de cada elemento de A:

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Propriedades da Soma/Subtração de Matrizes:

1) **Comutativa:** $A + B = B + A$
2) **Associativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$
3) **Elemento Neutro:** $A + 0 = A$
4) **Simétrico:** $A + (-A) = 0$

Multiplicação de um Número Real por uma Matriz

Para multiplicar uma matriz por um número real, basta multiplicar todos os seus elementos pelo mesmo número. Então seja o número real k:

$$B = k \cdot A \Rightarrow b_{ij} = k \cdot a_{ij} \tag{1.4}$$

Exemplo 1: Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, calcular a matriz 3A.

Solução: Utilizando a definição (1.4) teremos:

$$3A = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 & 5 \cdot 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 3A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes

Dada uma matriz $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ e uma matriz $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times p}$, denomina-se produto de A por B a matriz $C = \left(c_{ik}\right)_{m\times p}$, tal que o elemento c_{ik} é a soma dos produtos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B. Ou seja:

$$C = A \cdot B \Rightarrow c_{ij} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk} \tag{1.5}$$

Na multiplicação de duas matrizes, A e B, **o número de colunas de A deve ser igual ao número de linhas de B**; o produto terá o número de linhas de A e o número de colunas de B.

$$A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

Propriedades da Multiplicação de Matrizes:

1) **Associativa:** $A(BC) = (AB)C$

2) **Distributiva pela esquerda:** $A(B + C) = AB + AC$

3) **Distributiva pela direita:** $(B + C)A = BA + CA$

Observação 1: A multiplicação de matrizes, em geral, **não é comutativa**, ou seja, na maioria dos casos $AB \neq BA$. Se $AB = BA$, dizemos que as matrizes **comutam**.
Observação 2: Na multiplicação de matrizes podemos ter $AB = O$, onde O representa a matriz nula, mesmo com $A \neq O$ e $B \neq O$. Podemos ter também $AB = AC$ com $A \neq O$ e $B \neq C$.

Exemplo 1: Efetuar o produto das seguintes matrizes: $A = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Solução: Utilizando a definição (1.5) teremos:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 9 \cdot 1 + 7 \cdot 4 & 9 \cdot 2 + 7 \cdot 5 & 9 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \\ 0 \cdot 1 + 8 \cdot 4 & 0 \cdot 2 + 8 \cdot 5 & 0 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A \times B = \begin{pmatrix} 37 & 53 & 69 \\ 32 & 40 & 48 \end{pmatrix}$$

Observação 3: Repare que o produto tem o número de linhas de A e o número de colunas de B.

Matriz Inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I$, onde I é a matriz identidade de ordem n, dizemos que B é a matriz inversa da matriz A e indicamos por A^{-1}. Portanto:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n \tag{1.6}$$

Observação 1: A matriz I é da mesma ordem de A e B.
Observação 2: Se existe a inversa, dizemos que A é **inversível**, caso contrário, **não-inversível** ou **singular**.
Observação 3: A inversa de uma matriz é única.

Exemplo 1: Determinar a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Solução: Como a matriz A^{-1} não é conhecida, fazemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Da definição (1.6) sabemos que $A \cdot A^{-1} = I_2$, portanto, podemos escrever a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir daí aplicando a multiplicação de acordo com (1.5), obteremos os sistemas lineares abaixo:

$$\begin{cases} 2a + 4c = 1 \\ a + 5c = 0 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 2b + 4d = 0 \\ b + 5d = 1 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas, teremos:

$$a = \frac{5}{6}; c = -\frac{1}{6} \text{ e } b = -\frac{2}{3}; d = \frac{1}{3}$$

Logo a matriz inversa será: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Observação 4: Para uma matriz quadrada de ordem 1, a inversa é facilmente calculada, basta pensar na definição.
Exemplo 2: Calcular a inversa da matriz $A = [a]$.
Solução: Usando a definição:

$$A \cdot A^{-1} = I$$
$$[a] \cdot [x] = [1]$$
$$ax = 1$$

O que nos dá $x = \frac{1}{a}$.
Observação 5: O método apresentado aqui para o cálculo da matriz inversa pode ser muito trabalhoso para matriz de ordens maiores. Para tais, existe outro método não abordado neste material.

Exercícios de Fixação

1) Calcule a soma dos elementos da segunda coluna da matriz $B = (b_{ij})_{2\times 3}$ em que $b_{ij} = 2i + j - 1$.

2) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, mostre que $(A^t)^t = A$.

3) Calcule x e y, sabendo que $\begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 16 \end{pmatrix}$.

4) Sejam $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & a^2 \\ -27 & \log_3 \frac{1}{81} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2^b & 9 \\ a^3 & c \end{bmatrix}$.

5) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, obtenha a matriz X tal que $X = A + A^t$.

6) Sendo, $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcule X tal que $X + A - (B + C) = 0$.

7) Dados $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule AB e BA, mostrando que são diferentes.

8) Calcule a e b, de modo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ comutem.

9) Determine x e y na igualdade $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix}$.

10) Determine a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gabarito

1) 8

2) Para mostrar basta calcular a transposta, usando sua definição, e depois calcular novamente a transposta da resultante.

3) $x = 5$ e $y = -1$

4) $a = 3$ e $b = c = -4$

5) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

7) Calcular AB e BA através da definição e compará-las.

8) $a = 2$ e $b = 0$

9) $x = 1$ e $y = -1$

10) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$