Determinantes

Introdução

Determinante é um número real que se associa a uma matriz quadrada.

Determinante de uma Matriz Quadrada de 2ª Ordem

É a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

Observação 1: Se a matriz for quadrada de ordem 1 o determinante é o próprio elemento da matriz.

Exemplo 1: Achar o valor do determinante $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$.

Solução: Utilizando a definição (1.1):

$$\det = -4 + 18 = 14$$

Menor Complementar

Chamamos de **menor complementar** D_{ij}, relativo a um elemento a_{ij}, da matriz A de ordem **n** o determinante associado a matriz quadrada de $(n-1)^{\underline{a}}$ ordem, obtida em A eliminando-se a linha e a coluna do elemento considerado. Para exemplificar, consideremos uma matriz de 3ª ordem:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Assim, como exemplo, vejamos o menor complementar do elemento a_{11}:

$$D_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Por observação, verificamos que é o determinante de 2ª ordem que se obtém eliminando-se a linha 1 e a coluna 1 da matriz A. Mais adiante, veremos a aplicação prática do Menor Complementar.

Exemplo 1: Seja a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular o menor complementar dos seguintes elementos:

a) b_{22};

b) b_{23};

Solução: Aplicando a definição de menor complementar teremos:

a)

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow D_{22} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) \Rightarrow D_{22} = 4$$

b)

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow D_{23} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \Rightarrow D_{23} = 0$$

Cofator

Seja a matriz A de ordem n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Chama-se **Cofator** de a_{ij} o número real que se obtém multiplicando-se $(-1)^{i+j}$ pelo menor complementar dele, ou seja, D_{ij}, onde **i** e **j** representam a linha e a coluna do elemento **a** respectivamente. Então, teremos que o cofator A_{ij} do elemento a_{ij} é dado por:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij} \tag{1.2}$$

Exemplo 1: Calcular C_{11} na matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solução: Aplicando a definição (1.2) podemos escrever:

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow C_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow C_{11} = 0$$

Observação 1: Cuidado para não confundir a notação do cofator com o elemento em questão. A letra **maiúscula** refere-se ao **cofator** e a letra **minúscula** refere-se ao **elemento** do qual estamos buscando o cofator:

$C_{12} \rightarrow$ cofator do elemento c_{11}

$c_{11} \rightarrow$ elemento localizado na linha 1 e na coluna 1 da matriz C

Determinante de uma Matriz Quadrada De 3ª Ordem

Teorema de Laplace[1]

"O determinante de uma matriz de ordem 3 é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna qualquer pelos respectivos cofatores"

[1]**Pierre Simon, Marquis de Laplace (1749-1827)** — foi um matemático, astrônomo e físico francês que organizou a astronomia matemática, sumarizando e ampliando o trabalho de seu predecessores nos cinco volumes do seu Mécanique Céleste (Mecânica celeste) (1799-1825). Esta obra-prima traduziu o estudo geométrico da mecânica clássica usada por Isaac Newton para um estudo baseado em cálculo, conhecido como mecânica física. Ele também formulou a equação de Laplace. A transformada de Laplace aparece em todos os ramos da física matemática — campo em que teve um papel principal na formação. O operador diferencial de Laplace, da qual depende muito a matemática aplicada, também recebe seu nome.

Exemplo 1: Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.Calcule seu determinante.

Solução: Utilizando a linha 1 como parâmetro teremos:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\det A = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Observação 1: Nota-se que esse é um processo trabalhoso, portanto, é mais usual a utilização da regra que veremos adiante.

Observação 2: Para matrizes que possuem muitos "zeros" é fácil calcular o determinante através desta fórmula, uma vez que seus elementos multiplicados por seus respectivos cofatores dão resultado zero.

Regra de Sarrus[2]

É uma regra prática para a obtenção do determinante de uma matriz de 3ª ordem. Para exemplificar vamos calcular o determinante da matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Opção 1: Repetir a 1ª e a 2ª coluna à direita da matriz:

$$\det A = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{array}\right.$$

$(-)$ $(+)$

Feito isso, multiplicamos os elementos no sentido da diagonal principal e somamos os produtos, subtraindo dos produtos dos elementos no sentido da diagonal secundária, conforme esquema acima.

Exemplo: Calcular o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Solução: Aplicando Sarrus:

[2]**Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861)** — matemático francês. Sarrus foi professor na Universidade de Strasbourg, França (1826-1856) e membro da Academia de Ciências de Paris (1842). Ele é autor de vários tratados, incluindo um sobre a solução de equações numéricas com várias incógnitas (1842), um em integrais múltiplas e suas condições de integrabilidade e outro sobre a determinação das órbitas dos cometas. Também descobriu uma regra mnemônica para calcular o determinante de uma matriz de 3ª ordem, Além disso, demonstrou o lema fundamental do cálculo das variações.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

Multiplicando os elementos e efetuando as operações necessárias teremos:

$$\det A = \underbrace{(-1)1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \cdot (-3)}_{\substack{\text{soma dos produtos dos elementos} \\ \text{das diagonais principais}}} - \underbrace{\left[(-2) \cdot 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 0 \cdot 2\right]}_{\substack{\text{soma dos produtos dos elementos} \\ \text{das diagonais secundárias}}}$$

$$\det A = -27$$

Opção 2: Repetir a 1ª e a 2ª linha abaixo da matriz. Feito isso, segue como anteriormente, ou seja, os produtos no sentido da diagonal principal têm seu sinal mantido, enquanto os produtos no sentido da diagonal secundária têm o sinal invertido.

Determinante de uma Matriz Quadrada de Ordem N > 3

Para calcularmos o determinante de uma matriz de 4ª ordem, aplicamos o teorema de Laplace para abaixar a ordem do determinante, assim calcularemos determinantes de 3ª ordem. É um processo trabalhoso, mas fica facilitado se escolhemos uma linha ou coluna que contenha elementos iguais a zero.

Exemplo 1: Calcular o determinante abaixo:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solução: Utilizando o teorema de Laplace na segunda linha – que é a contém mais zeros – obteremos a seguinte expressão:

$$x = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Como podemos ver, as três últimas parcelas são nulas:

$$x = 2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x = -2 \times (10 - 17)$$

$$x = 14$$

Exercícios de Fixação

1) Sabendo que $a = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 1 \end{vmatrix}$ e $b = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$, calcule o valor de $3a + b^2$.

2) Calcule o determinante da matriz $\begin{pmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{pmatrix}$.

3) Seja a matriz quadrada de 3ª ordem em que $a_{ij} = i + j$. Determine o cofator do elemento a_{32}.

4) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

5) Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encontre o valor de N, sabendo que $N = 50 + \det(AB)$.

6) Dê o valor do determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

7) Determine a solução da equação $\begin{vmatrix} x & \sqrt[3]{8} \\ -2 & -x \end{vmatrix} = 0$

8) Sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dê o valor de:

a) det (A) · det (B)
b) det (A·B)

Gabarito

1) 37
2) zero
3) 2
4) $x = 2$
5) 50
6) -25
7) $\{-2, 2\}$
8) a) -10 ; b) -10